



שאלון 581 (806)

טריגונומטריה במישור

16/05/2019

טריגונומטריה

זהויות:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

אין נוסחאות לזווית
כפולה בדף הנוסחאות

($\beta = \alpha$ מתקבלת מהצבת) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha && (\beta = \alpha \text{ מתקבלת מהצבת}) \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 1 && \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \text{ מהצבת} \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha && \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ מהצבת} \end{aligned}$$

שימו לב !! גם הזהות: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ לא מופיע בדף הנוסחאות

נוסחאון מתמטיקה - 5 יחידות לימוד - המשך

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

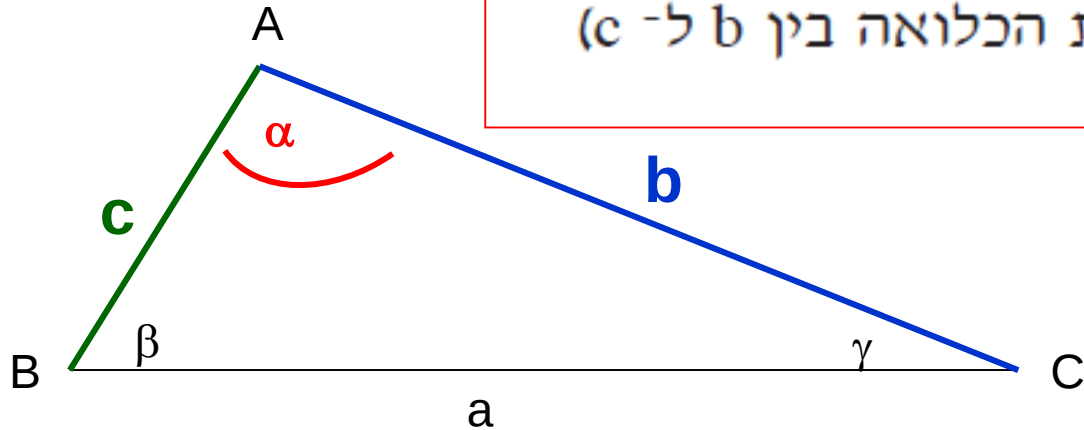
משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ (R – רדיוס המעגל החוסם)

משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ (γ היא הזווית הכלואה בין a ל-b)

אורך קשת של α רדיאנים: $\ell = \alpha R$ שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2} \alpha R^2$

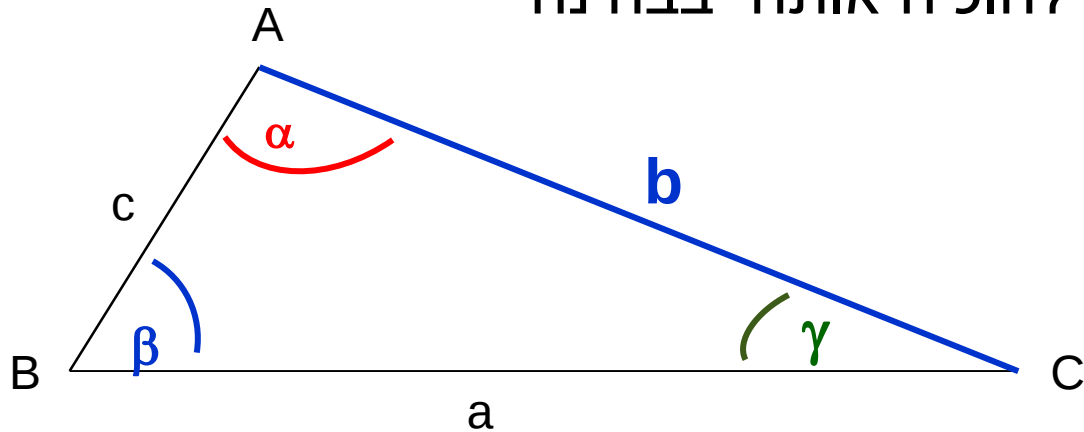
נוסחאון מתמטיקה - 5 יחידות לימוד - המשך

שטח משולש: $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)



נוסחה נוספת שימושית - **שאינה בדף הנוסחאות** ויש להוכיח אותה בבחינה

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

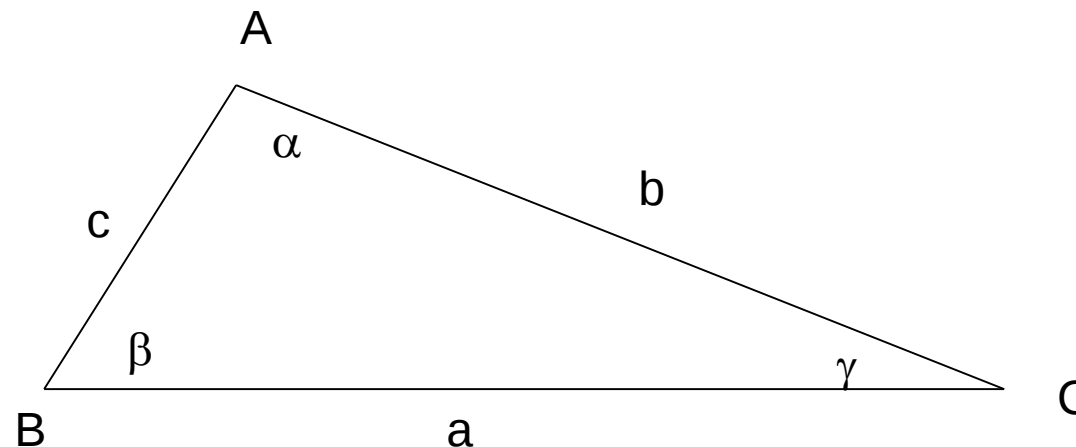


חישוב שטח משולש באמצעות צלע אחת וכל הזוויות

ההוכחה בהמשך ההרצאה



תזכורת מהירה על הנושא

משולש כללי

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

משפט הסינוסים

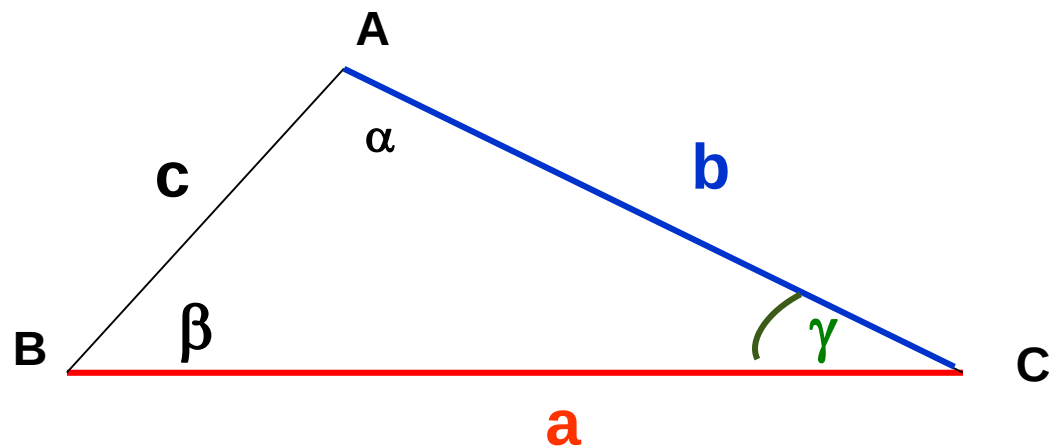
(R - רדיוס המעגל החוסם)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

משפט הקוסינוסים

בשיקופיות הבאות נציג את השלבים
לפתרון משולש כאשר הנתונים
הם כמו נתוני משפטי החפיפה

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה ראשון



צ.ז.צ.

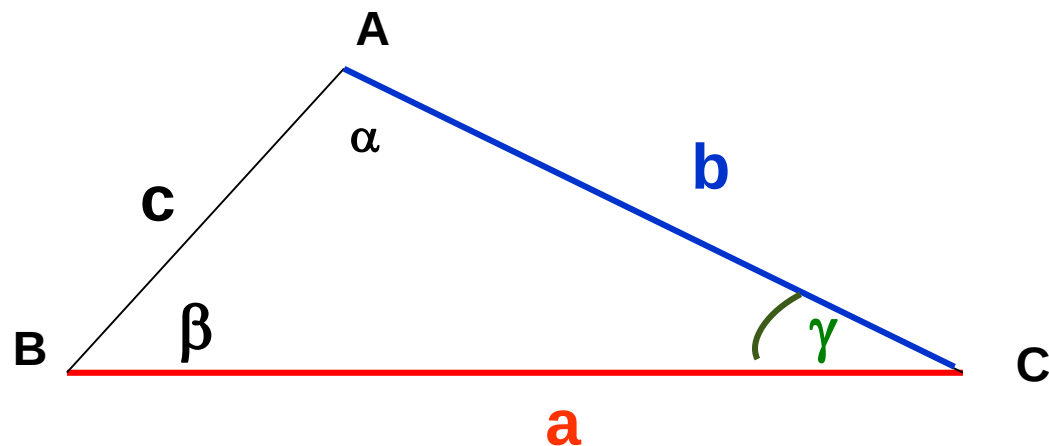
במשולש ABC נתון:

$$\angle ACB = \gamma, AC = b, BC = a$$

צריך לחשב: צלע AB (c) וזוויות α ו- β

צ.ז.צ.

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה ראשון



$$\angle ACB = \gamma, AC = b, BC = a$$

צריך לחשב צלע AB (c) וזוויות α ו-β

* נחשב את צלע c - בעזרת משפט הקוסינוסים – הצבה ישירה בנוסחה

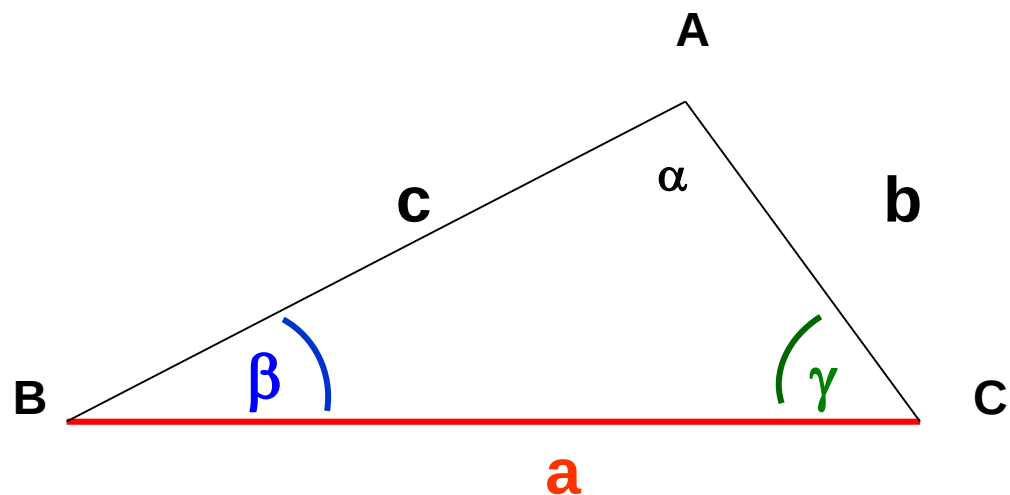
* נבחר את הצלע הקטנה מבין b ו-a, **נניח ש: a < b** (כמו בשרטוט)

(בחירה זו מבטיחה שהזווית β חדה - ומתקבלת מהמחשבון)

* נחשב את זווית β - בעזרת משפט הסינוסים – הצבה בנוסחה

* נחשב את זווית α - משלימה ל- 180° במשולש ABC $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה שני



ז.צ.ז.

במשולש ABC נתון:

$$\angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma, BC = a$$

צ. לחשב: צלעות AB (c), AC (b) וזווית α

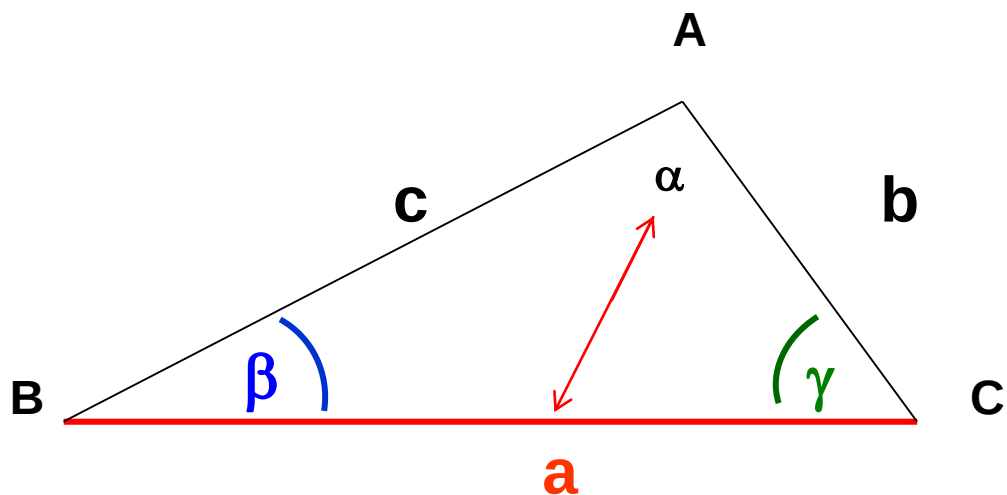
פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה שני

.ז.צ.ז

במשולש ABC נתון:

$$\angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma, BC = a$$

צ. לחשב: צלעות AB (c), AC (b) וזווית α

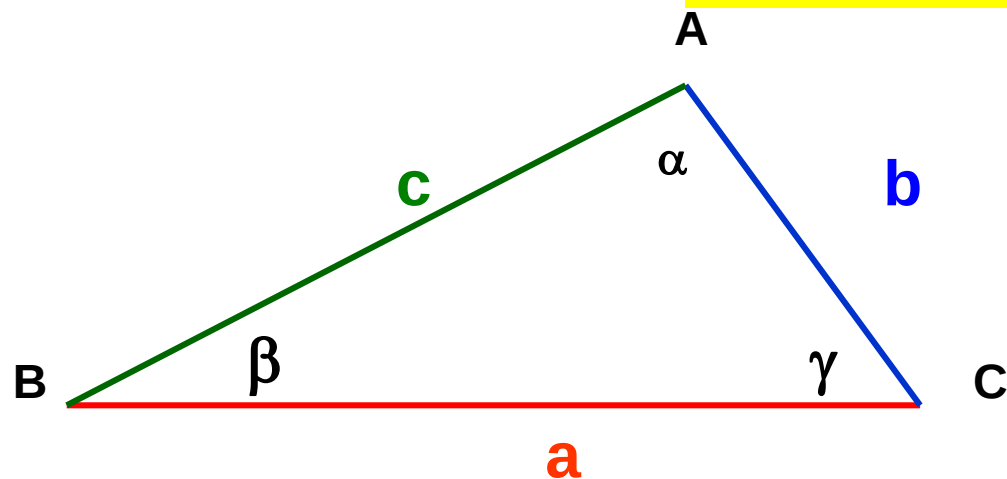


* נחשב את זווית α - משלימה ל- 180° במשולש ABC $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

* נחשב את צלע **c** - בעזרת משפט הסינוסים

* נחשב את צלע **b** - בעזרת משפט הסינוסים

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה שלישי



צ.צ.צ.

במשולש ABC נתון:

$$AB = c, AC = b, BC = a$$

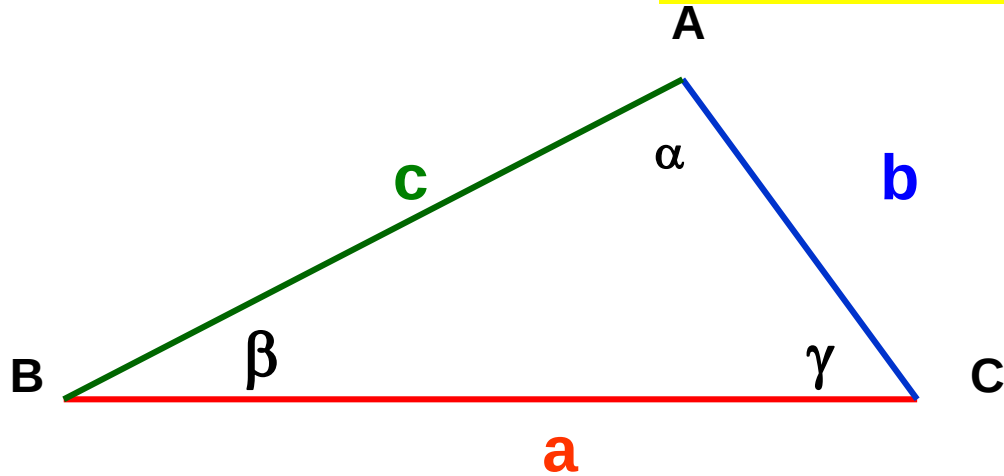
צ. לחשב: זוויות α , β ו- γ

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה שלישי

במשולש ABC נתון:

$$AB = c, AC = b, BC = a$$

צ. לחשב: זוויות α, β, γ



* נחשב את הזווית מול הצלע הגדולה ביותר - בעזרת משפט הקוסינוסים

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

* נחשב את זווית מול הצלע נוספת – בעזרת משפט הסינוסים (בהכרח תהיה ז' חדה)

* נחשב את הזווית השלישית - משלימה ל - 180°

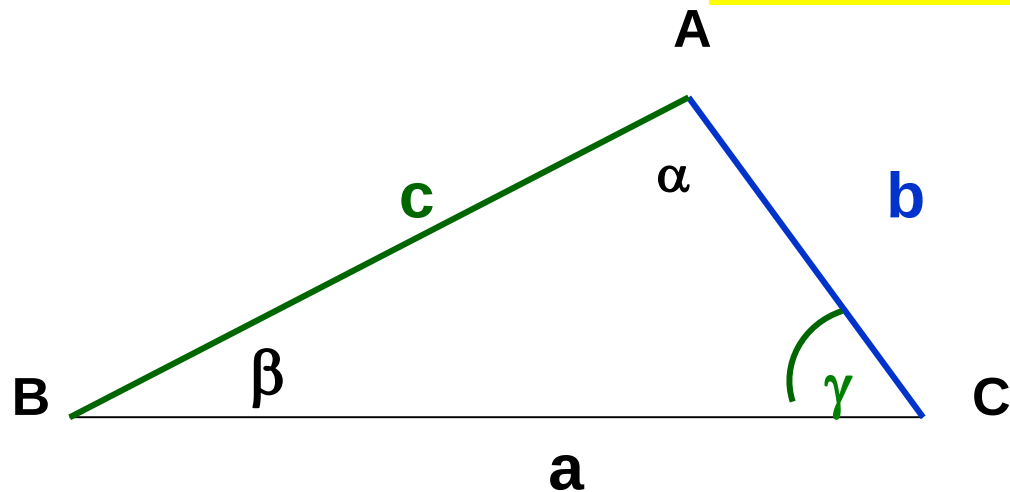
פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה רביעי

צ.צ.ז.

במשולש ABC נתון:

$$AB = c, \angle ACB = \gamma, AC = b$$

צ. לחשב: צלע BC (a), וזוויות α, β

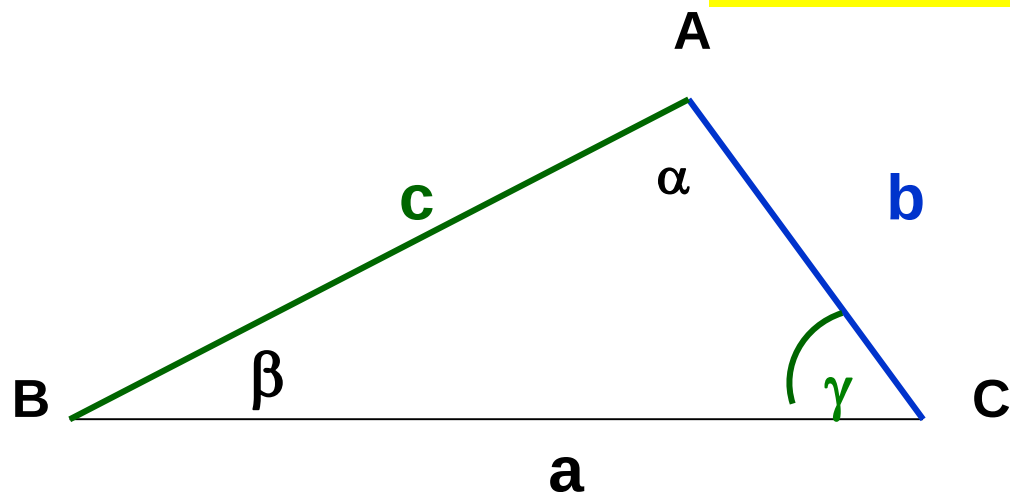


צ.צ.ז.

פתרון משולש כאשר הנתונים הם כנתוני משפט חפיפה רביעי

במשולש ABC נתון:

$$AB = c, \angle ACB = \gamma, AC = b$$

צ. לחשב: צלע BC (a), וזוויות α, β * נחשב את זווית β - בעזרת משפט הסינוסים – הצבה בנוסחה

$$(\beta - \text{זווית חדה כי מתקיים } \beta < \gamma)$$

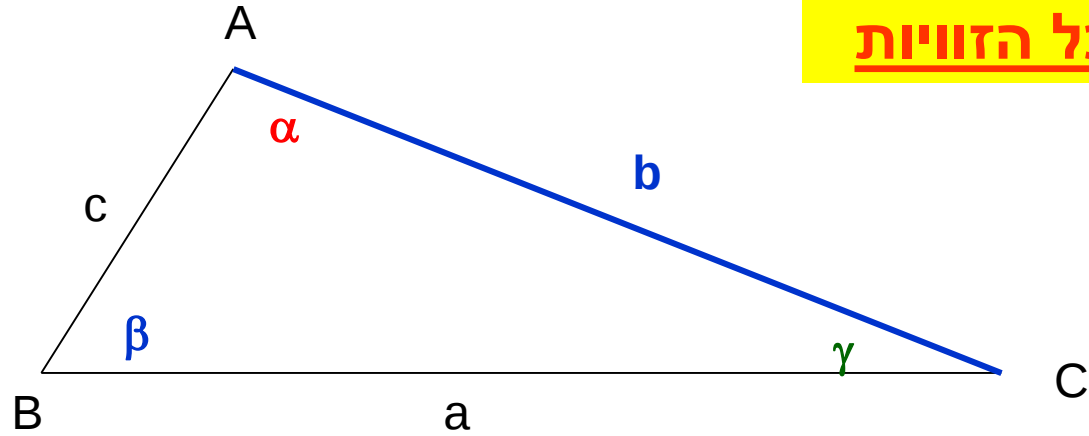
* נחשב את זווית α - משלימה ל- 180° במשולש ABC $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

* נחשב את צלע a - בעזרת משפט הסינוסים – הצבה בנוסחה:



נוסחאות לשטחים

הוכחת נוסחת שטח משולש באמצעות צלע אחת וכל הזוויות



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

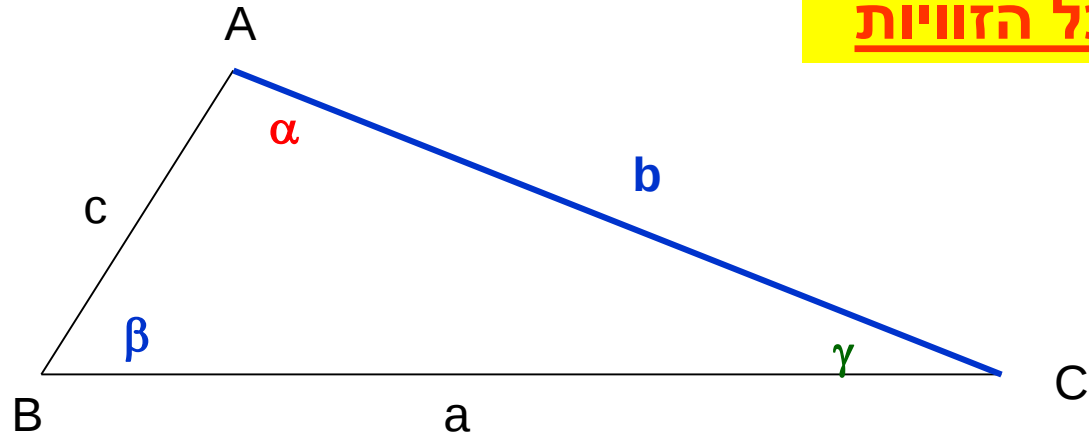
$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

✓

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

?

הוכחת נוסחת שטח משולש באמצעות צלע אחת וכל הזוויות



$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

✓

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

?

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

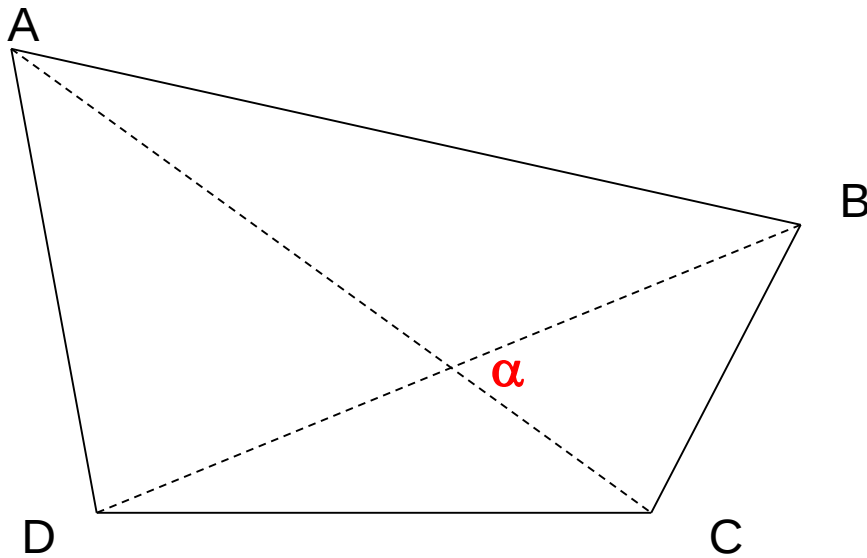
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot \sin \alpha}{2} \cdot c = \frac{b \cdot \sin \alpha}{2} \cdot \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

חישוב שטח משולש באמצעות צלע אחת
וכל זוויות המשולש

שטח מרובע

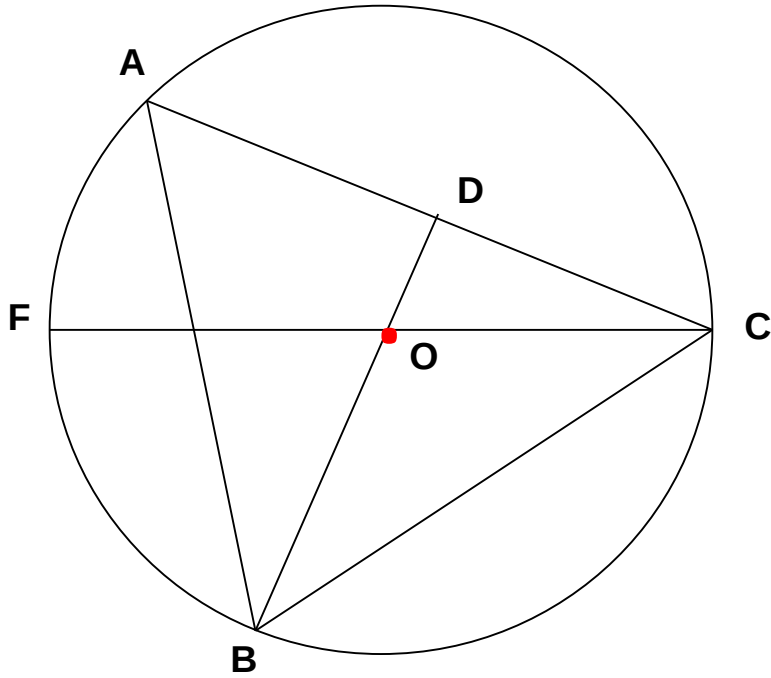


K_1 , K_2 - אלכסונים
 α - זווית בין האלכסונים

$$S_{\text{מרובע}} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

בגרות 806 - חורף תשע"א

שאלה 5 – טריגו במעגל



משולש חד זווית ABC חסום במעגל שמרכזו O .

CF הוא קוטר במעגל, והמשך הרדיוס BO חותך את הצלע AC בנקודה D , כמתואר בציור.

נתון: $\angle ABD = \alpha$

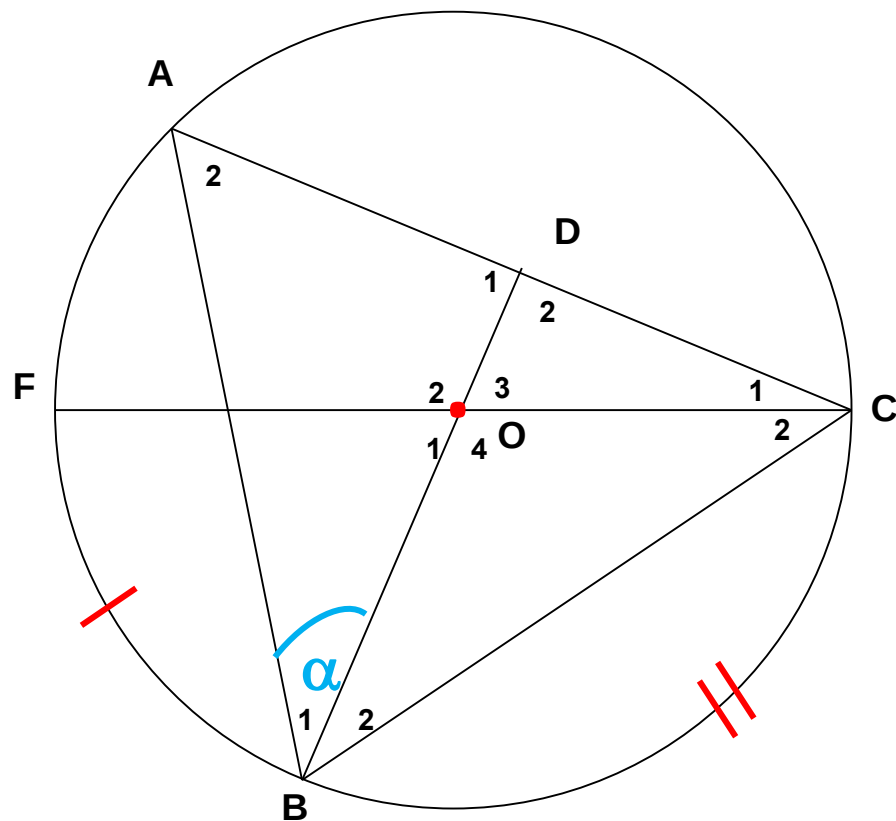
הקשת $\widehat{BC}$ ארוכה פי 2 מהקשת $\widehat{FB}$

א. חשב את גודל הזווית BAC .

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC .

ג. נתון גם כי $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$

חשב את יחס השטחים שהבעת בסעיף ב'.



CF הוא קוטר במעגל, נתון: $\angle ABD = \alpha$

הקשת $\widehat{BC}$ ארוכה פי 2 מהקשת $\widehat{FB}$

א. חשב את גודל הזווית BAC.

CF הוא קוטר במעגל, נתון: $\angle ABD = \alpha$

הקשת BC ארוכה פי 2 מהקשת FB

א. חשב את גודל הזווית BAC.

$\angle A_2$

נתון: $\widehat{BC} = 2 \cdot \widehat{FB} \rightarrow \angle O_4 = 2\angle O_1 = 2\beta$

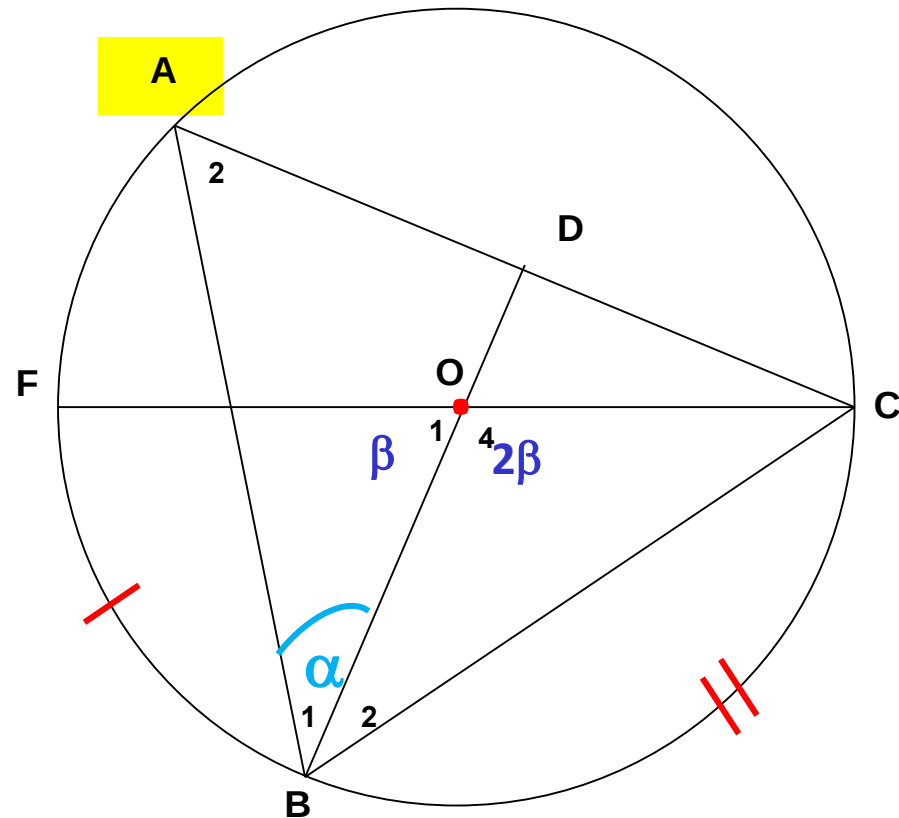
FC קוטר $\widehat{FC} = 180^\circ \rightarrow \angle FOC = 180^\circ$

$$\angle O_1 + \angle O_4 = \beta + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

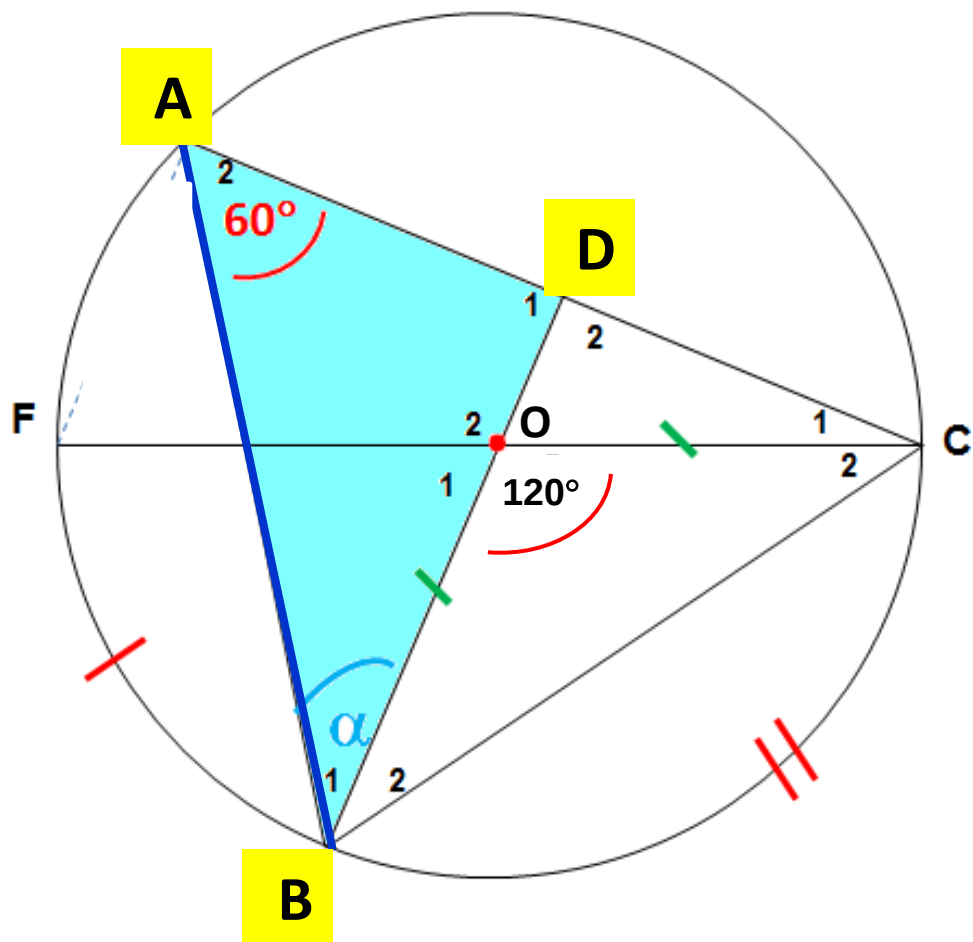
$$\angle O_4 = 2\beta = 120^\circ$$

$$\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle O_4 = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

ז' היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת



$$\angle BAC = \angle A_2 = 60^\circ$$



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

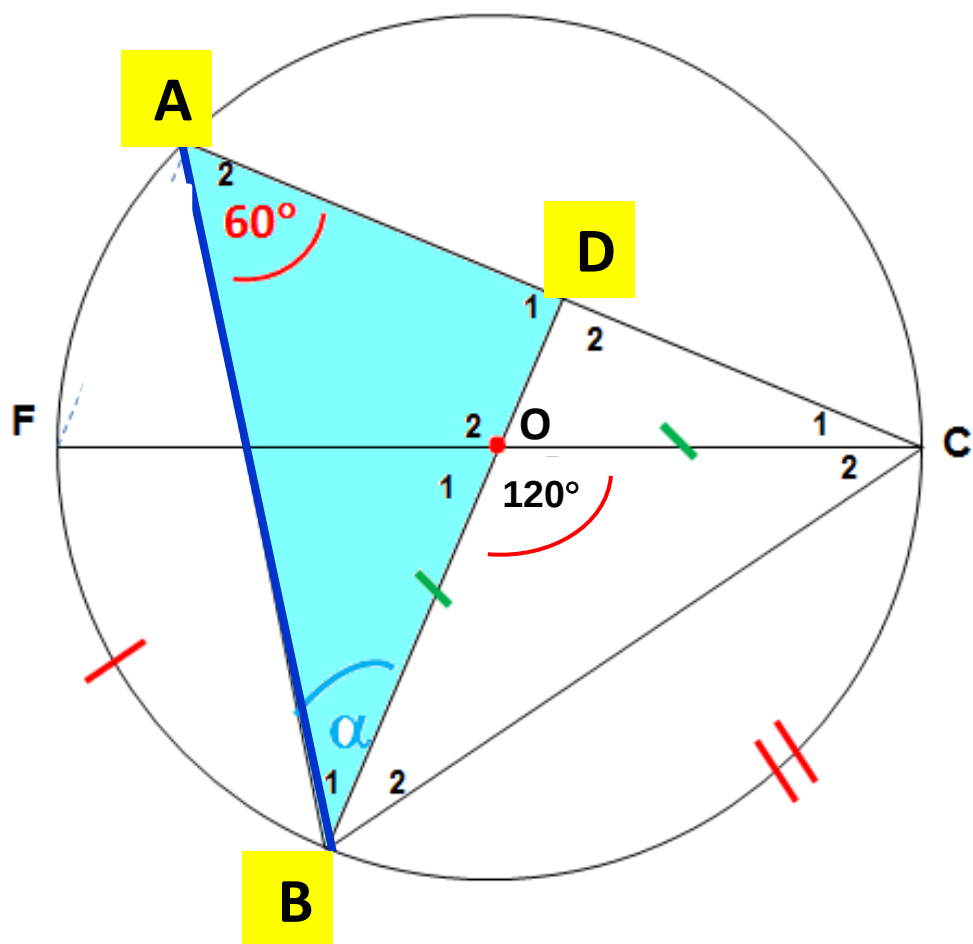
הנוסחאות לשטח משולש :

רשומה בדף הנוסחאות

$$S_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

הראינו קודם

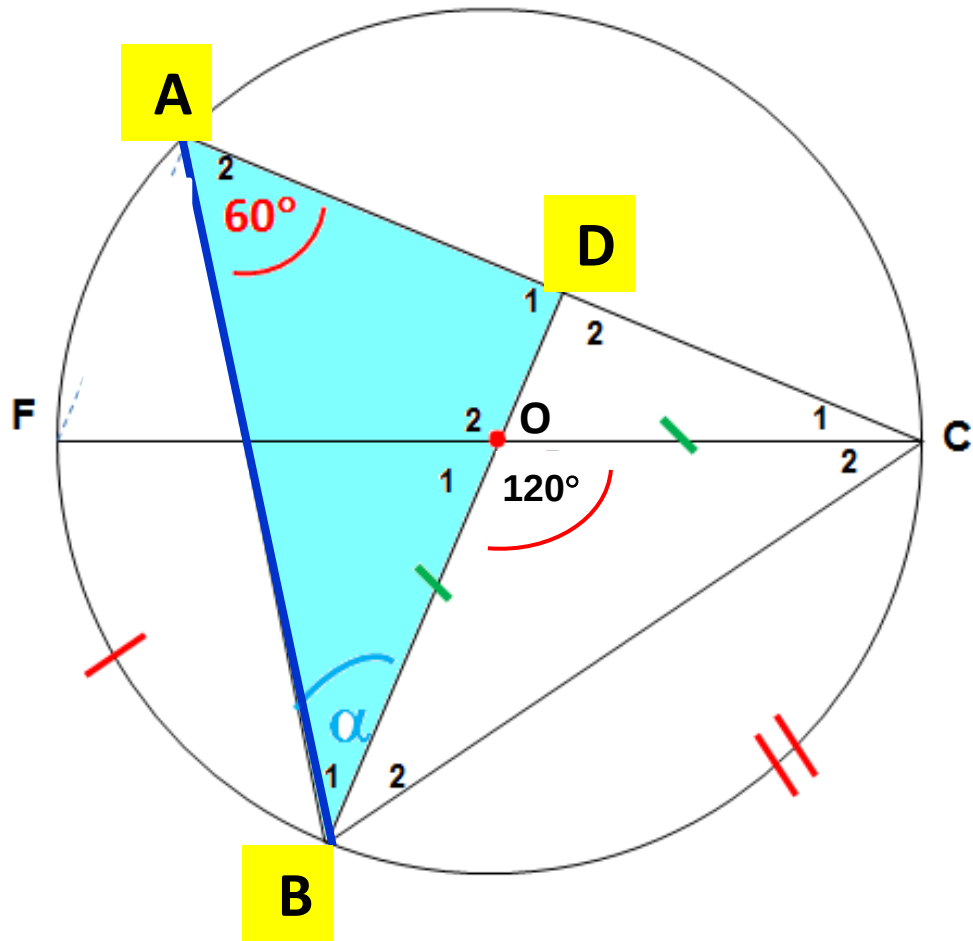
$$S_{\triangle ABC} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

בעזרת הנוסחה:



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

בעזרת הנוסחה:

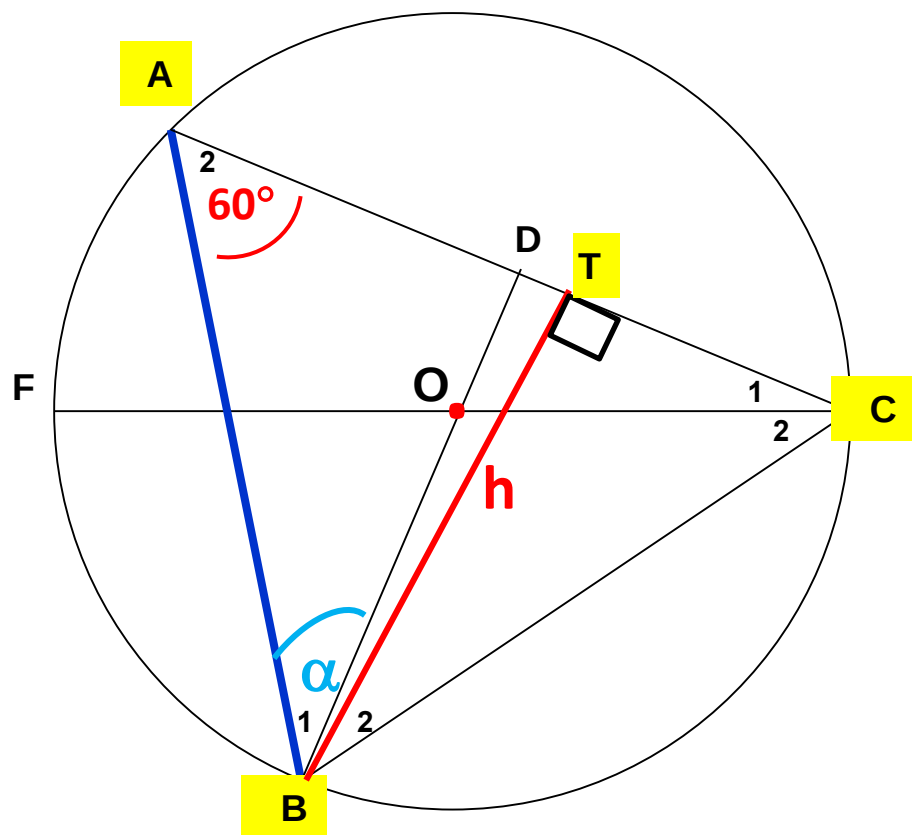
$$S_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB \cdot AD \sin 60^\circ}{2}$$

$$S_{\triangle BAC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

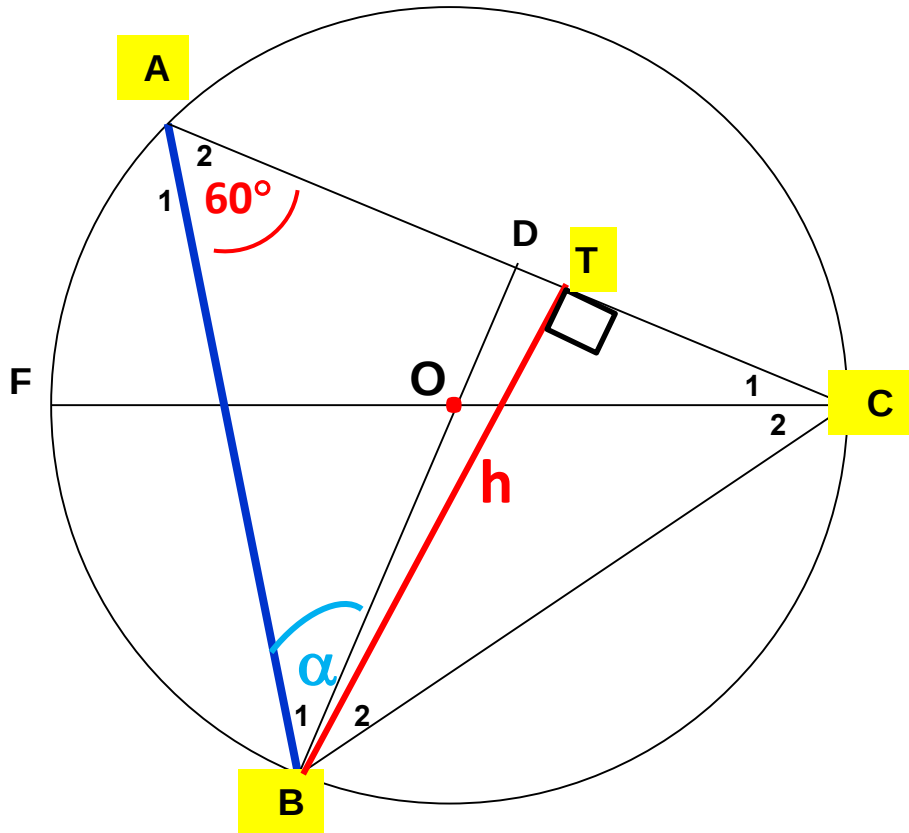
$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{\frac{AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ}{2}} = \frac{AD}{AC}$$

ומכאן אפשר לתאר את AD ו- AC באמצעות AB ו- α ולהתקדם לתיאור היחס



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

נוריד גובה BT מ- B לצלע AC



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ΔBAD לשטח המשולש ΔBAC .

נוריד גובה BT מ-B לצלע AC

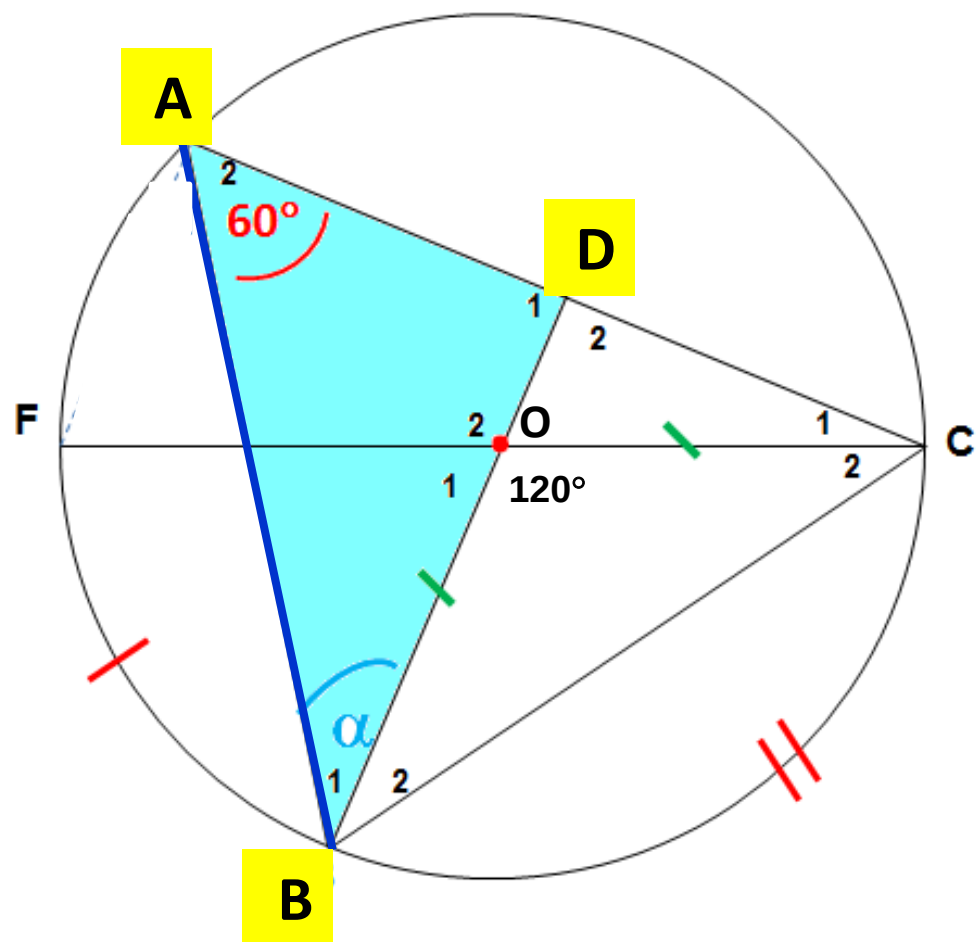
$$S_{\Delta BAC} = \frac{AC \cdot h}{2} = 0.5AC \cdot h$$

$$S_{\Delta BAD} = \frac{AD \cdot h}{2} = 0.5AD \cdot h$$

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{0.5AD \cdot h}{0.5AC \cdot h} = \frac{AD}{AC}$$

ומכאן אפשר לתאר את AD ו- AC באמצעות AB ו- α ולהתקדם לתיאור היחס

בעזרת נוסחת השטח שלא מופיע בדף הנוסחאות



ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$

$$S_{\Delta} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

לשטח המשולש $\triangle BAC$.

נתאר את שטח משולש $\triangle BAD$

צלע **AB** משותפת לשני המשולשים –

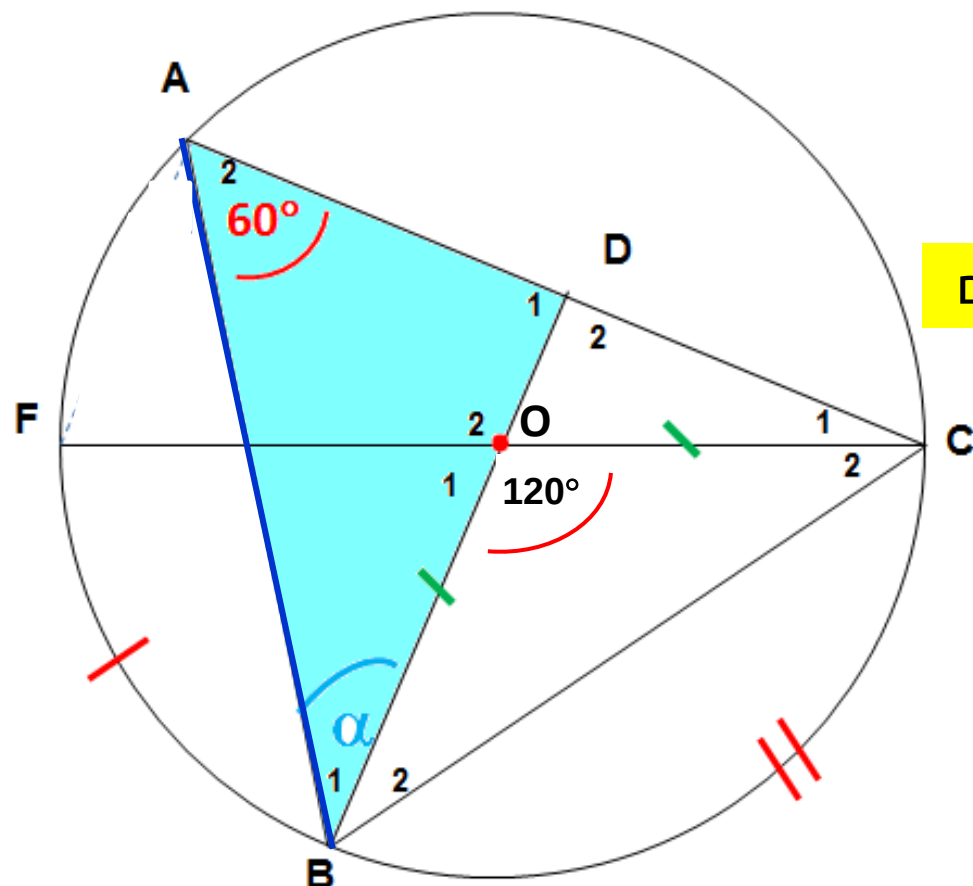
נתאר את שטח $\triangle BAD$ באמצעות AB וכל הזוויות

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

נתאר את שטח משולש $\triangle BAD$

זוויות המשולש :

צלע AB משותפת לשני המשולשים



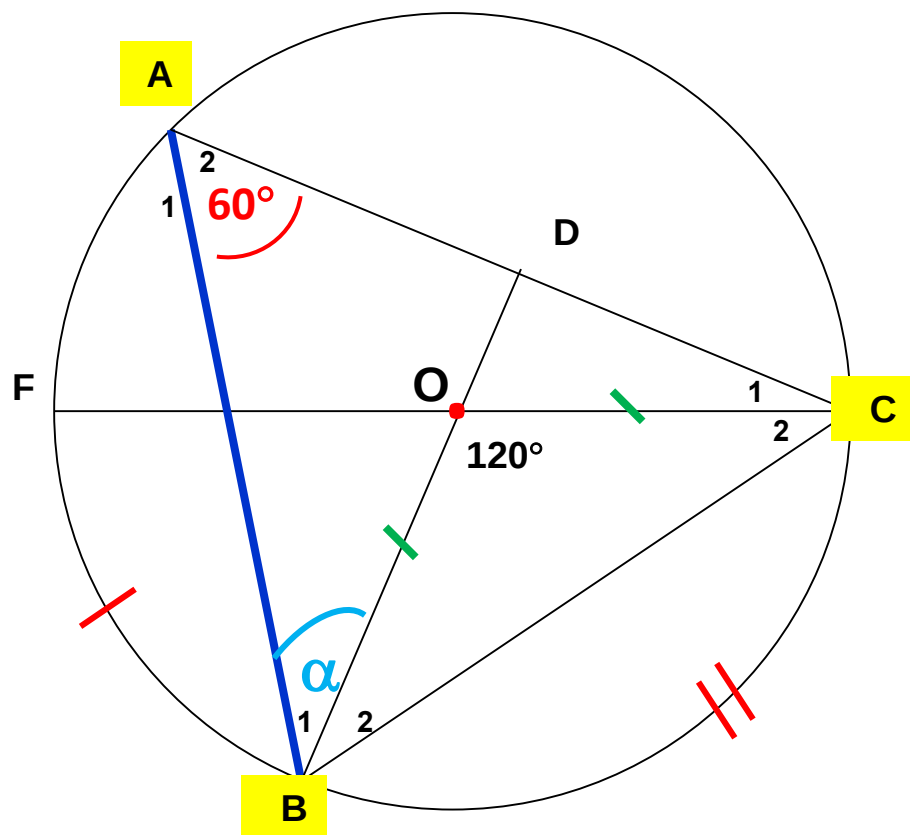
$$\triangle ABD \Rightarrow \begin{cases} \angle B_1 = \alpha \\ \angle A_2 = 60^\circ \\ \angle D_1 = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ) \quad (= 120^\circ - \alpha) \end{cases}$$

$$S_{\Delta} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin \angle A_2 \cdot \sin \angle B_1}{2 \sin \angle D_1} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin (60^\circ + \alpha)}$$

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin (120^\circ - \alpha)}$$

$$\sin [180^\circ - (\alpha + 60^\circ)]$$



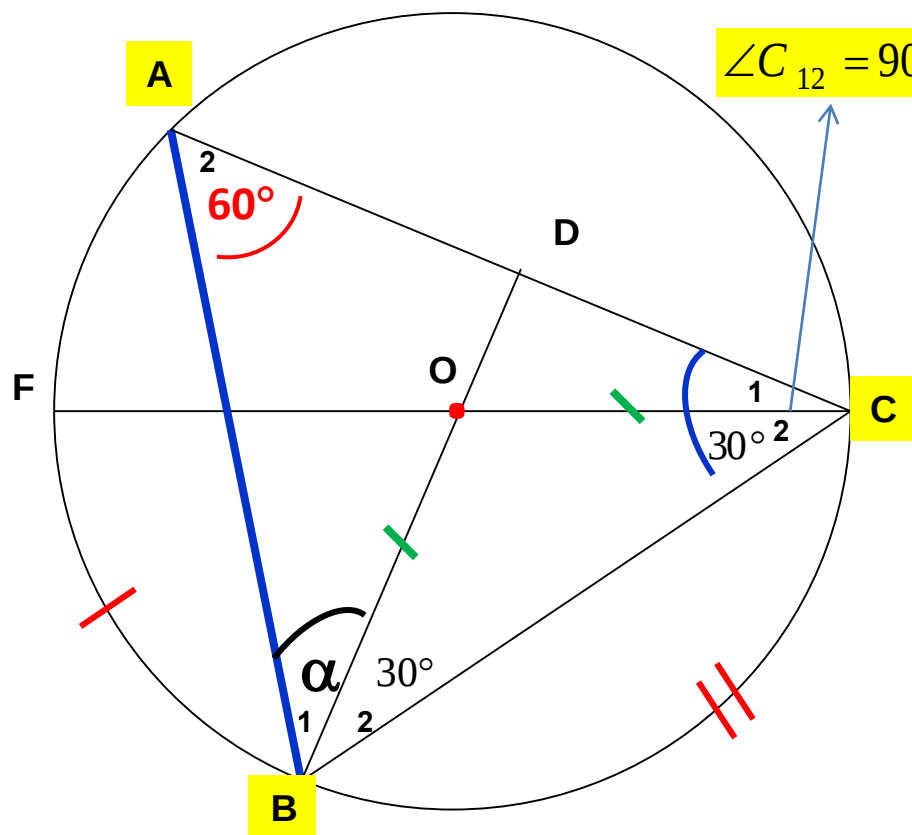
ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$

לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\Delta} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

נתאר את שטח משולש $\triangle BAC$

נחשב את זוויותיו :

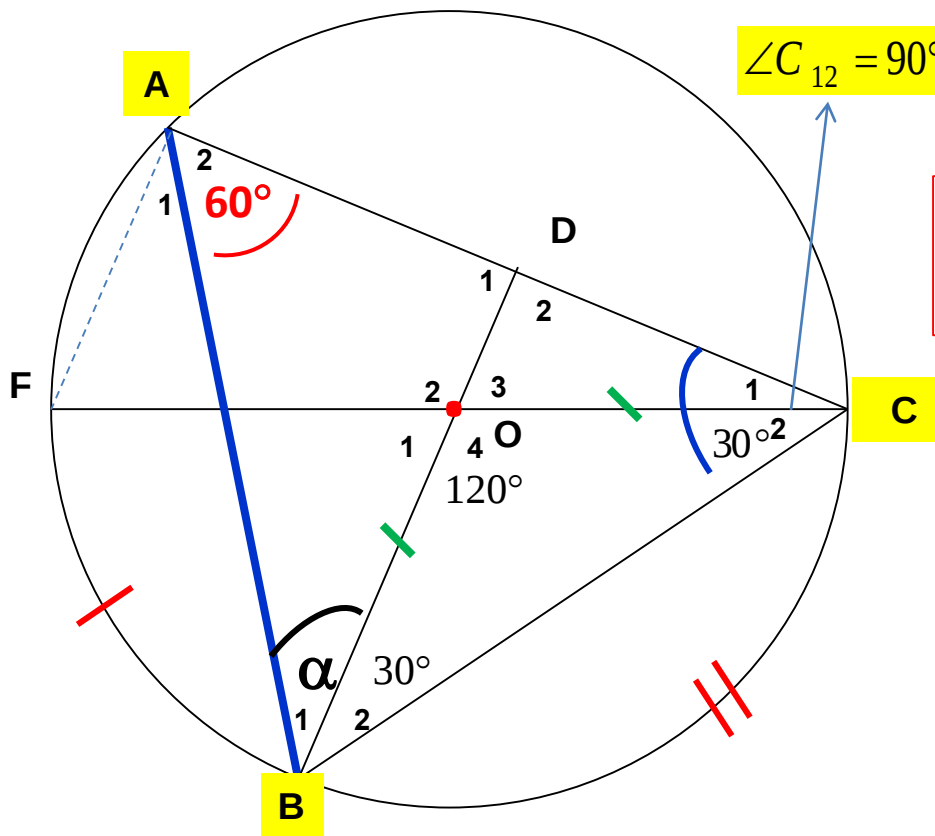


ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\Delta} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

נתאר את שטח משולש $\triangle BAC$

$$\triangle BAC \quad \begin{cases} \angle A_2 = 60^\circ \\ \angle B_{12} = 30^\circ + \alpha \\ \angle C_{12} = 180^\circ - (30^\circ + \alpha + 60) = 90^\circ - \alpha \end{cases}$$



$$\angle C_{12} = 90^\circ - \alpha$$

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$

לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\Delta} = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

נתאר את שטח משולש $\triangle BAC$

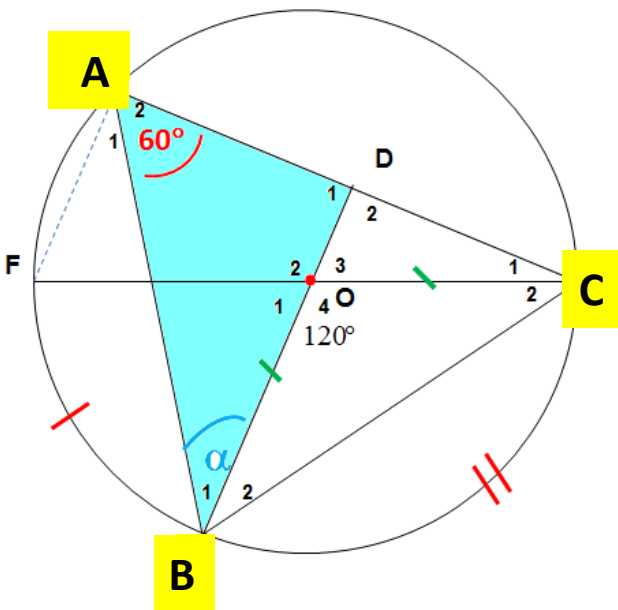
$$\triangle BAC \quad \begin{cases} \angle A_2 = 60^\circ \\ \angle B_{12} = 30^\circ + \alpha \\ \angle C_{12} = 180^\circ - (30^\circ + \alpha + 60) = 90^\circ - \alpha \end{cases}$$

$$S_{\triangle BAC} = \frac{AB^2 \cdot \sin \angle A_2 \cdot \sin \angle B}{2 \sin \angle C} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \sin(90^\circ - \alpha)}$$

$\cos \alpha$

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$

לשטח המשולש $\triangle BAC$.



$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha)}$$

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin(120^\circ - \alpha)}$$

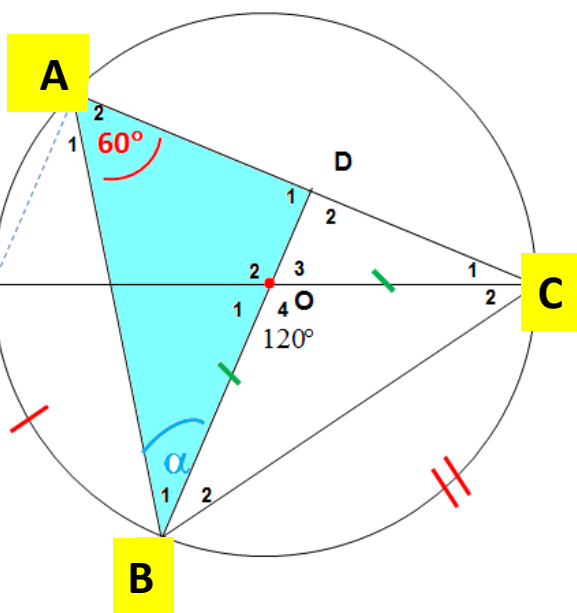
$$S_{\triangle BAC} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cos \alpha}$$

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$

לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha)}$$

$$S_{\triangle BAC} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cos \alpha}$$



$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha)} : \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cos \alpha} =$$

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{\cancel{AB^2} \cdot \cancel{\sin 60^\circ} \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cancel{AB^2} \cdot \cancel{\sin 60^\circ} \cdot \sin(30^\circ + \alpha)} =$$

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש $\triangle BAD$ לשטח המשולש $\triangle BAC$.

$$S_{\triangle BAD} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha)}$$

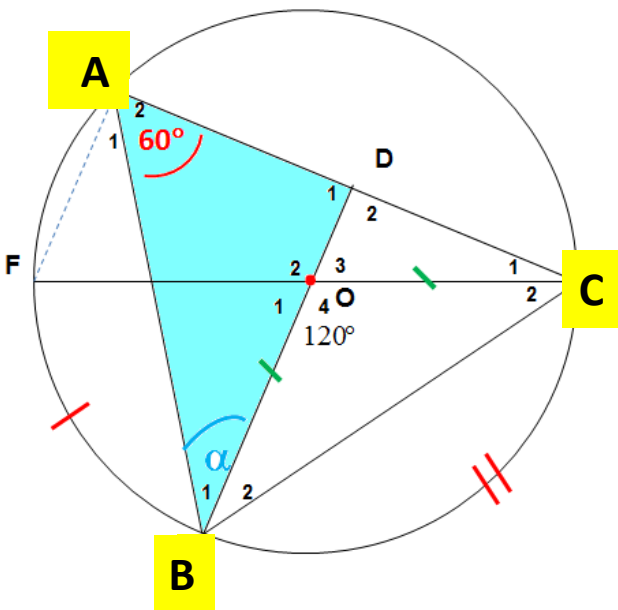
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cos \alpha}$$

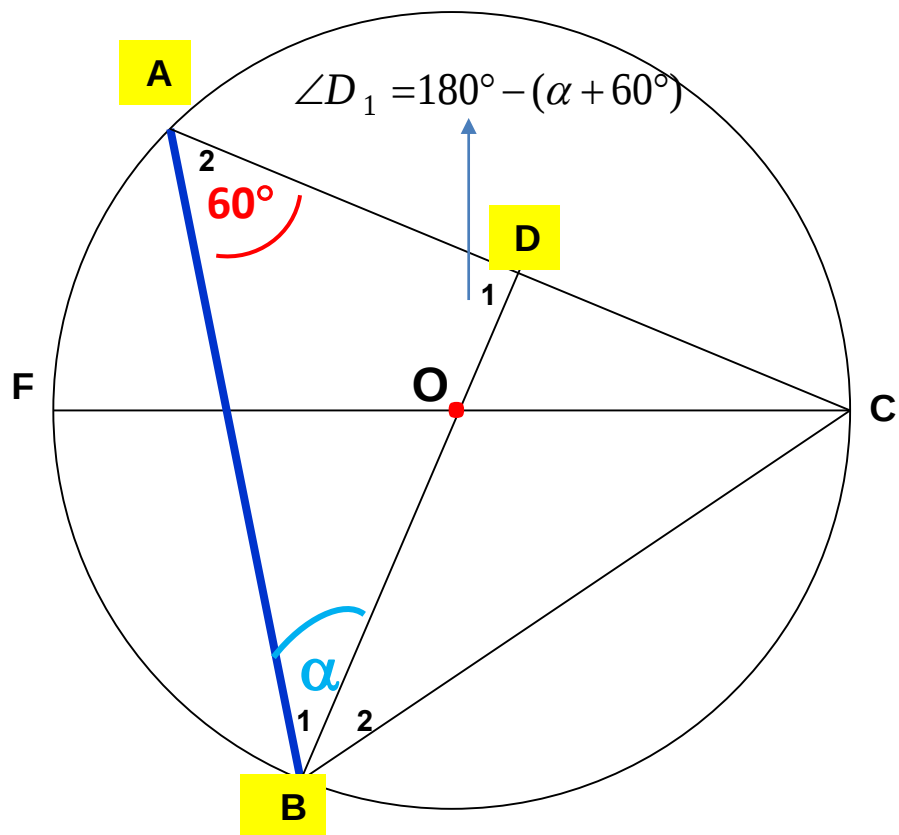
$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \alpha \cdot 2 \cos \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}$$

$$\frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}$$

יחס השטחים :





ג. נתון גם כי $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ חישוב זווית α

* משפט סינוסים במשולש $\triangle BAD$

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(60^\circ + \alpha)} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{2}{3}$$

ג. נתון גם כי

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$$

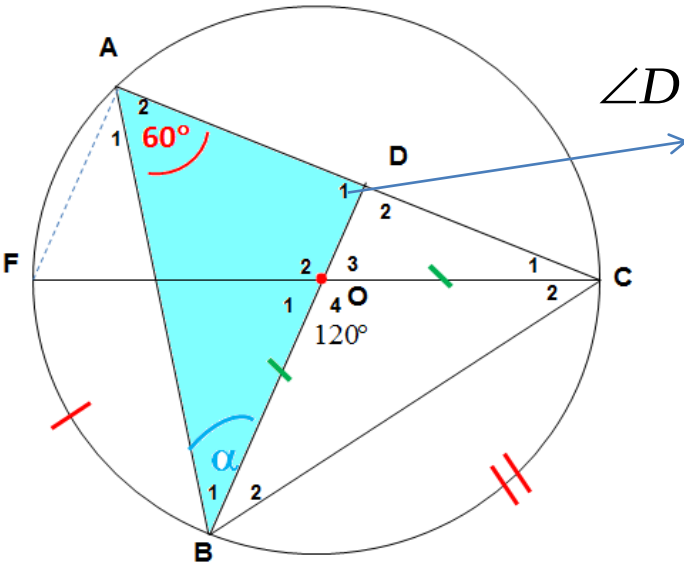
חישוב זווית α * משפט סינוסים במשולש $\triangle BAD$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{2}{3}$$

$$\angle D_1 = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ)$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha = 2 \sin(60^\circ + \alpha) \Rightarrow$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha = 2 \sin(60^\circ + \alpha) \Rightarrow$$

חישוב זווית α

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{ג. נתון גם כי}$$

$$3 \sin \alpha = 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin \alpha \right) \Rightarrow$$

$$\sin(60^\circ + \alpha)$$

$$3 \sin \alpha = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \right] \Rightarrow$$

$$3 \sin \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \Rightarrow$$

$$2 \sin \alpha = \sqrt{3} \cdot \cos \alpha \quad / \quad : 2 \cos \alpha \quad (\alpha \Rightarrow \cos \alpha > 0)$$

$$\frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 40.8933^\circ$$

מותר לחלק ב- $\cos \alpha$ כי $\sin \alpha$ ו- $\cos \alpha$

לא מתאפסים יחד

ג. נתון גם כי

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = 40.8933^\circ$$

מסעיף ב' :

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}$$

חשב את יחס השטחים שהבעת בסעיף ב'.

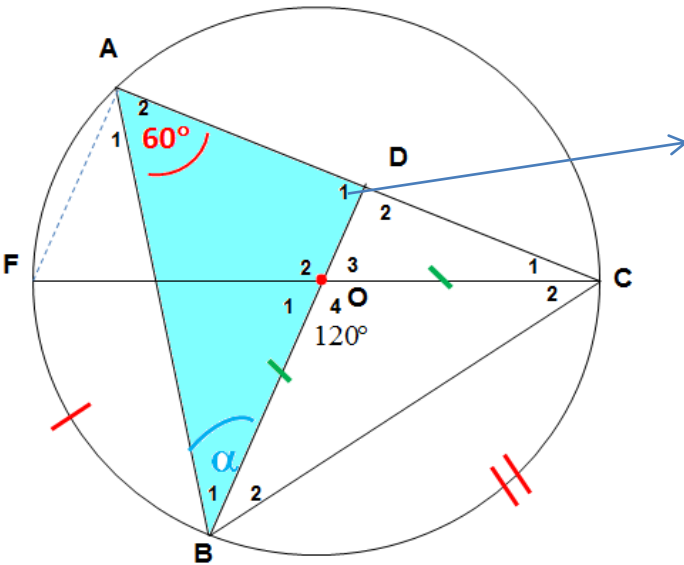
$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin(120^\circ - \alpha) \cdot \sin(30^\circ + \alpha)},$$

$$\alpha = 40.8933^\circ$$

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{\sin(2 \cdot 40.8933^\circ)}{2 \sin(120^\circ - 40.8933^\circ) \cdot \sin(30^\circ + 40.8933^\circ)} = 0.5333$$

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = 0.5333$$

יחס השטחים :



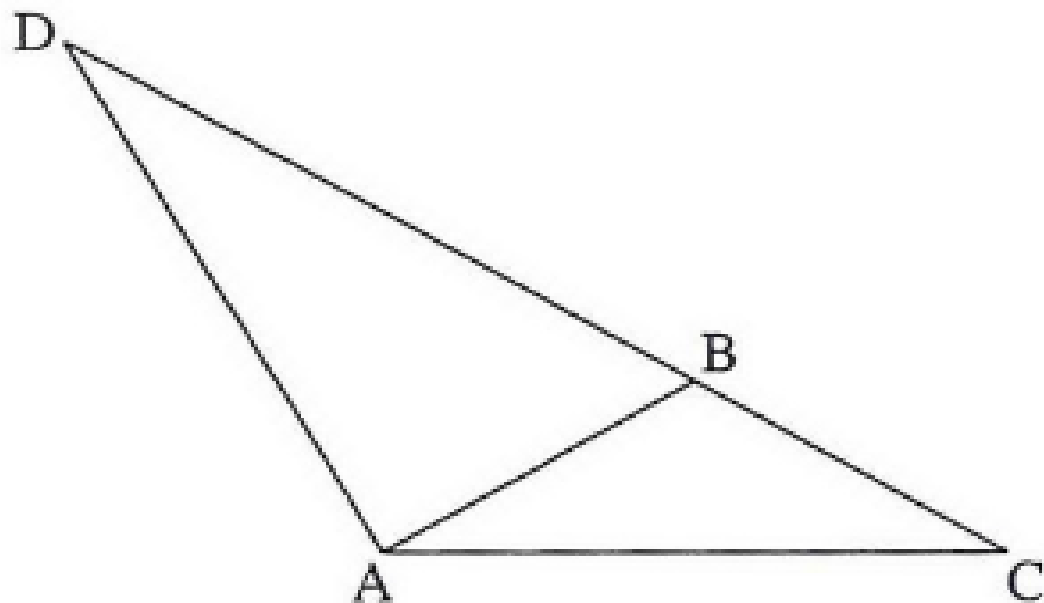


טיפ !

פתרון בעיה טריגונומטרית דורש ידיעת תכונות גאומטריות רלוונטיות

בגרות 806 - קיץ תשע"ג - מועד ג'

שאלה 5 – טריגו במשולש



נתון משולש שווה שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3 BC$ (ראה ציור)

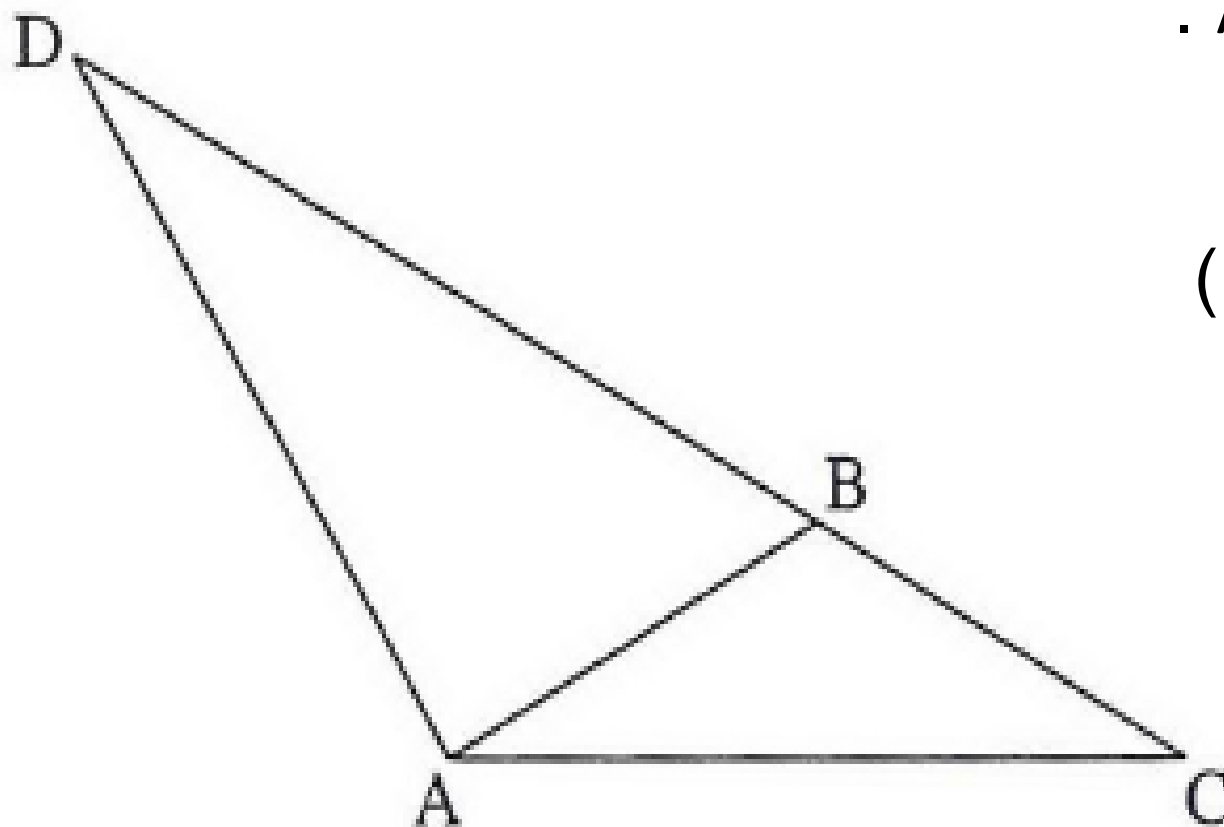
א. מצא את גודל הזווית ADC .

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר .

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC .

מצא את האורך של הקטע DT

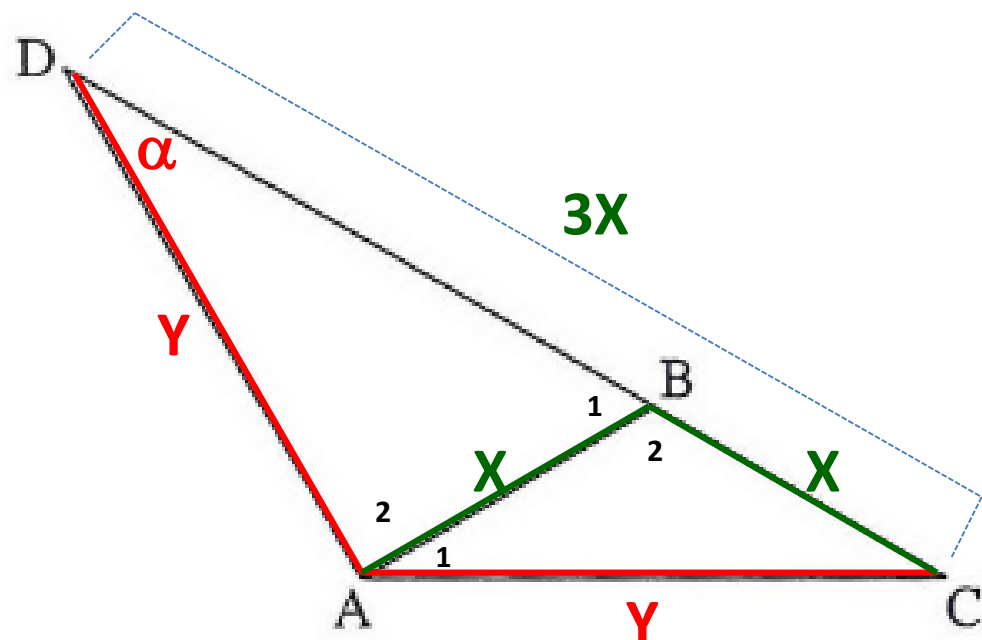


נתון משולש שווה שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3 BC$ (ראה ציור)

א. מצא את גודל הזווית ADC .



נתון משולש שווה שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

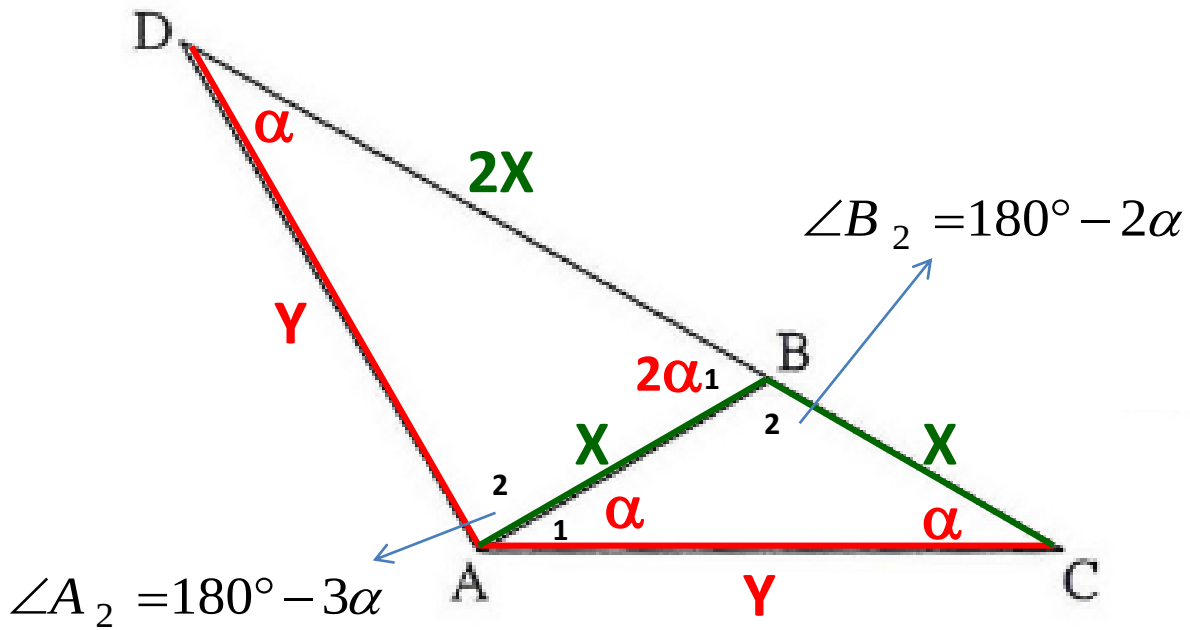
נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3 BC$ (ראה ציור)

א. מצא את גודל הזווית ADC .

נסמן : $BC = X$, $Y = AD = AC$, $\angle ADC = \alpha$

נסמן את כל הנתונים בשרטוט ונשלים זוויות



נתון משולש שווה שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC

כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3BC$ (ראה ציור)

א. מצא את גודל הזווית ADC.

נסמן: $BC = X$, $\angle ADC = \alpha$

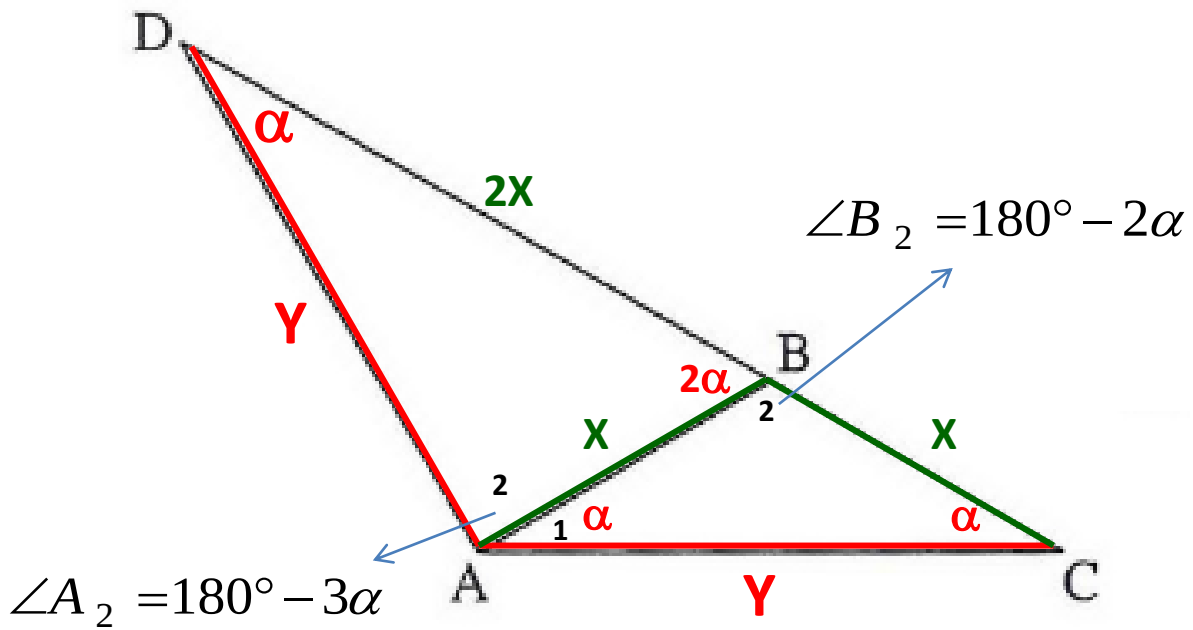
$$BC = x, \quad DC = 3BC = 3x \Rightarrow DB = 2x \quad *$$

$$\angle D = \angle C = \alpha \Leftarrow \text{משולש ADC ש"ש} \quad *$$

$$\angle A_1 = \angle C = \alpha \Leftarrow \angle B_1 = 2\alpha \quad \text{ז' חיצונית למשולש ABC} \quad *$$

נסמן: $BC = X$, $\angle ADC = \alpha$

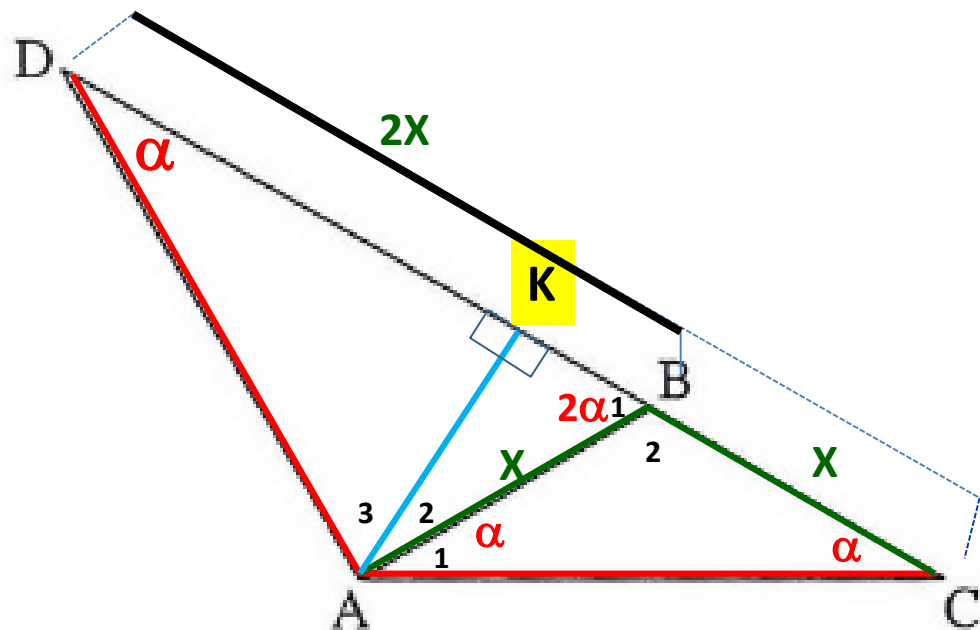
א. מצא את גודל הזווית ADC.



$\angle ADC = \alpha$, $BC = X$: נסמך

א. מצא את גודל הזווית ADC .

בניית עזר : נוריד גובה AK מ-A ל-DC

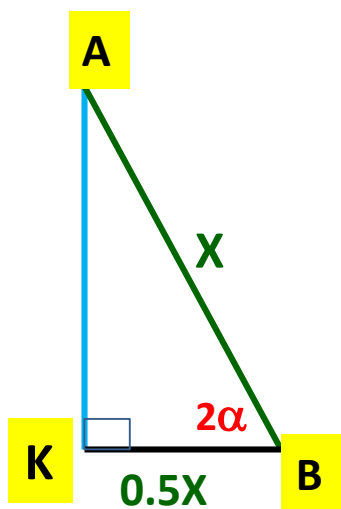
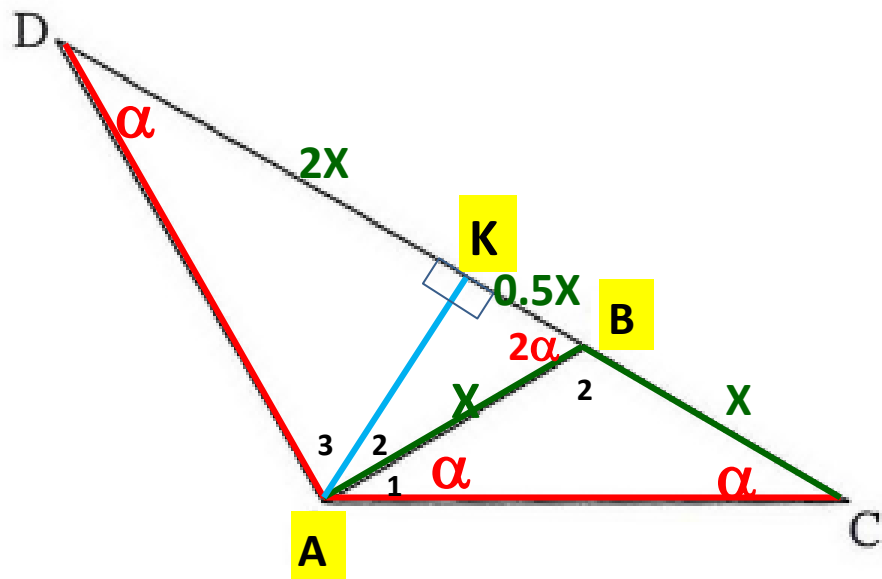


נסמן: $BC = X$, $\angle ADC = \alpha$

א. מצא את גודל הזווית ADC .

* AK גובה לבסיס במשולש ש"ש – גם תיכון

$$DC = 3x \Rightarrow DK = CK = 1.5x \Rightarrow KB = 0.5x$$



נסמן: $BC = X$, $\angle ADC = \alpha$

א. מצא את גודל הזווית ADC.

* AK גובה לבסיס במשולש ש"ש – גם תיכון

$$DC = 3x \Rightarrow DK = CK = 1.5x \Rightarrow KB = 0.5x$$

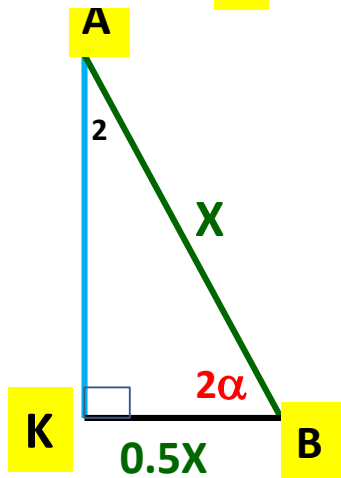
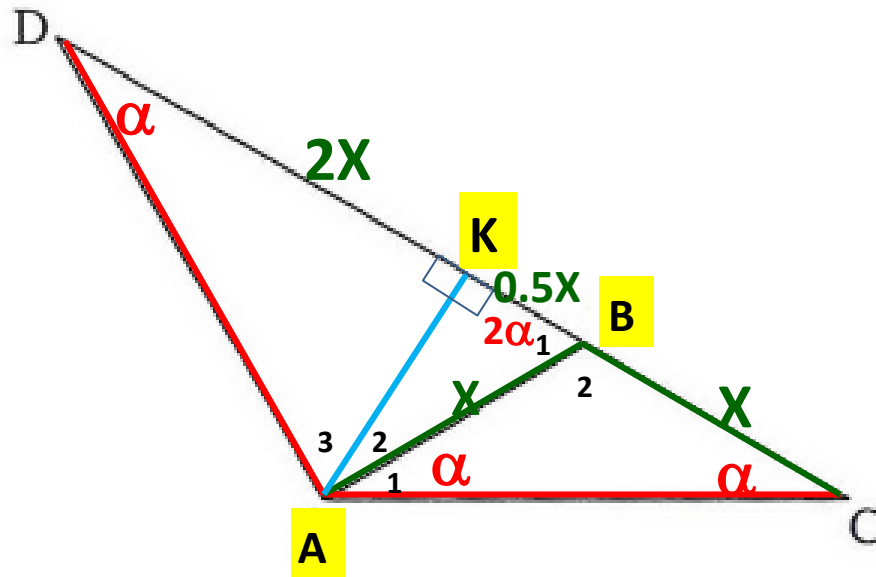
$$\Delta AKB \text{ ישר זווית} \Rightarrow \cos \angle B_1 = \frac{0.5x}{x} = 0.5$$

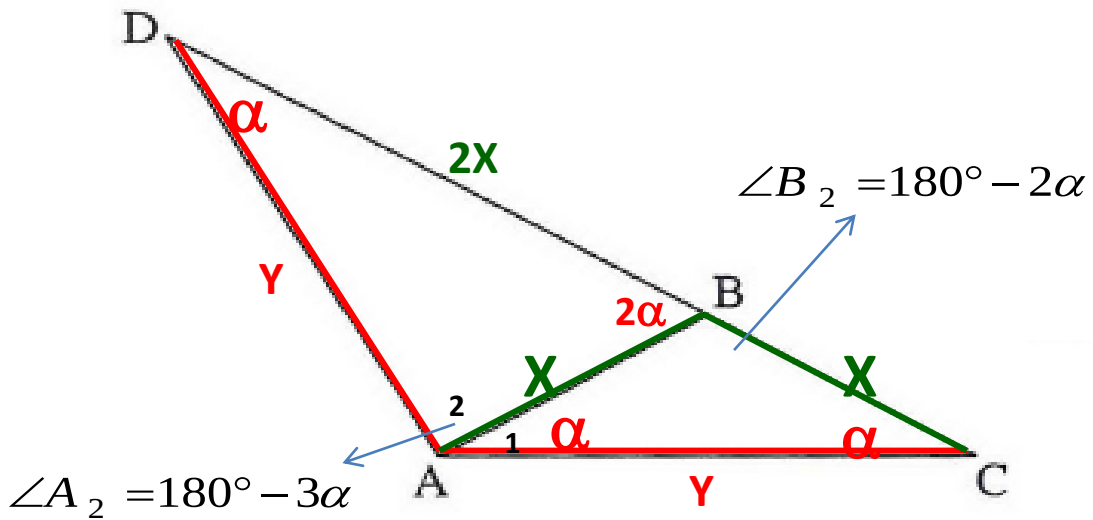
$$\Rightarrow \angle B_1 = 60^\circ = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle D = \alpha = 30^\circ$$

דרך נוספת

משולש ABK ישר זווית
בו הניצב שווה למחצית יתר
 $\angle A_2 = 30^\circ \Leftarrow$



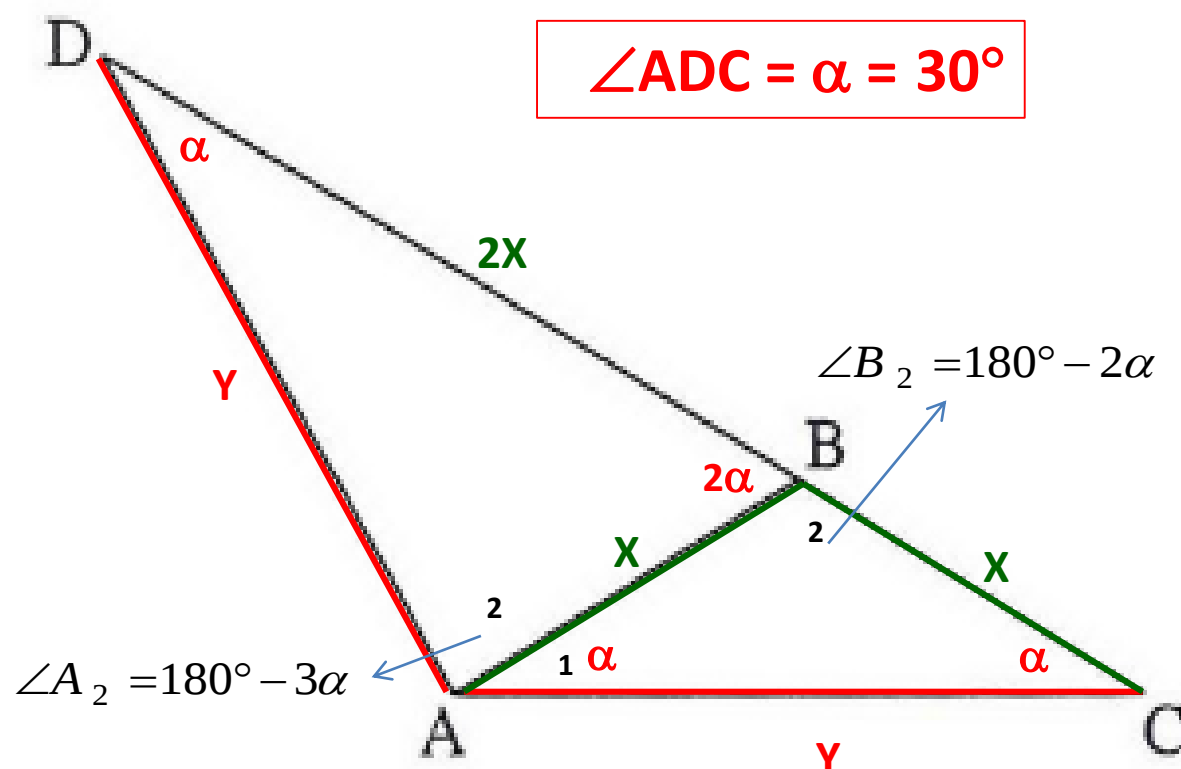


נסמן: $BC = X$, $\angle ADC = \alpha$ - ז' חדה

א. מצא את גודל הזווית $\angle ADC$.

$$\Delta ADC \sim \Delta BAC \text{ ז.ז.}$$

(משולשים ש"ש עם זווית בסיס α)



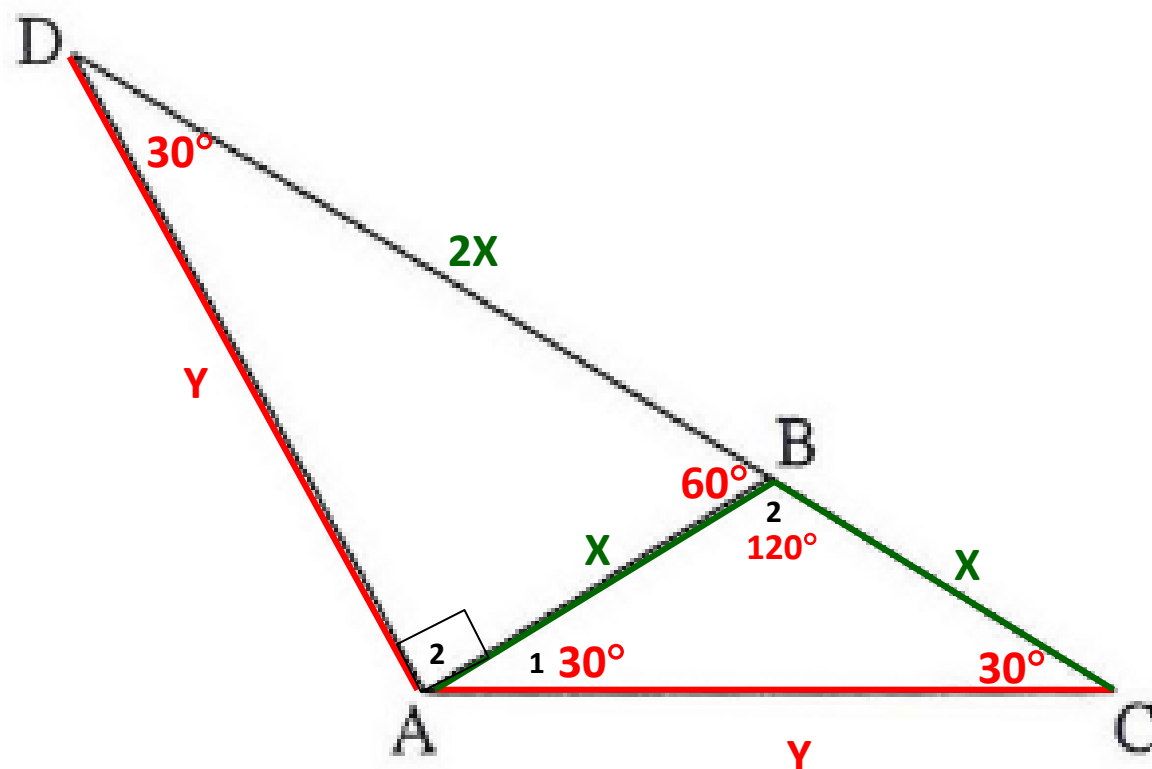
ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר .

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC

מצא את האורך של הקטע DT

נשלים את כל הזוויות



ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC

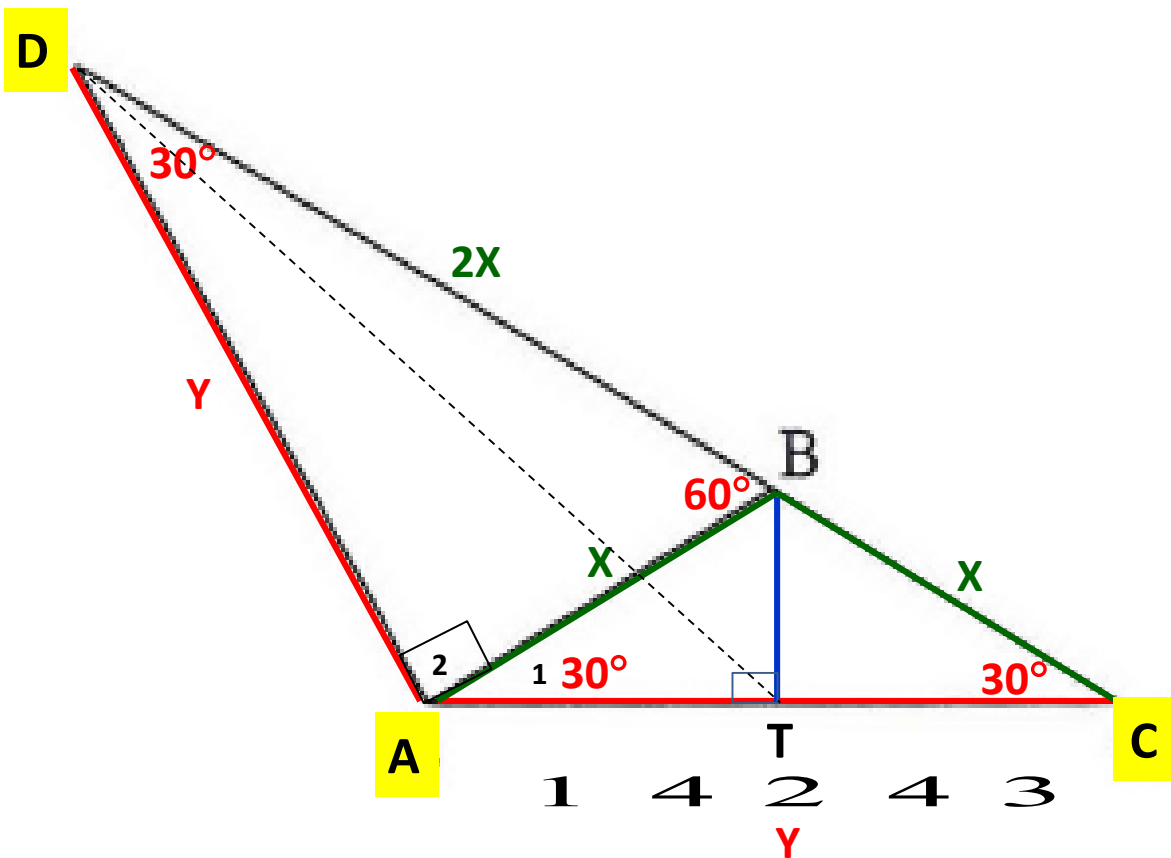
מצא את האורך של הקטע DT

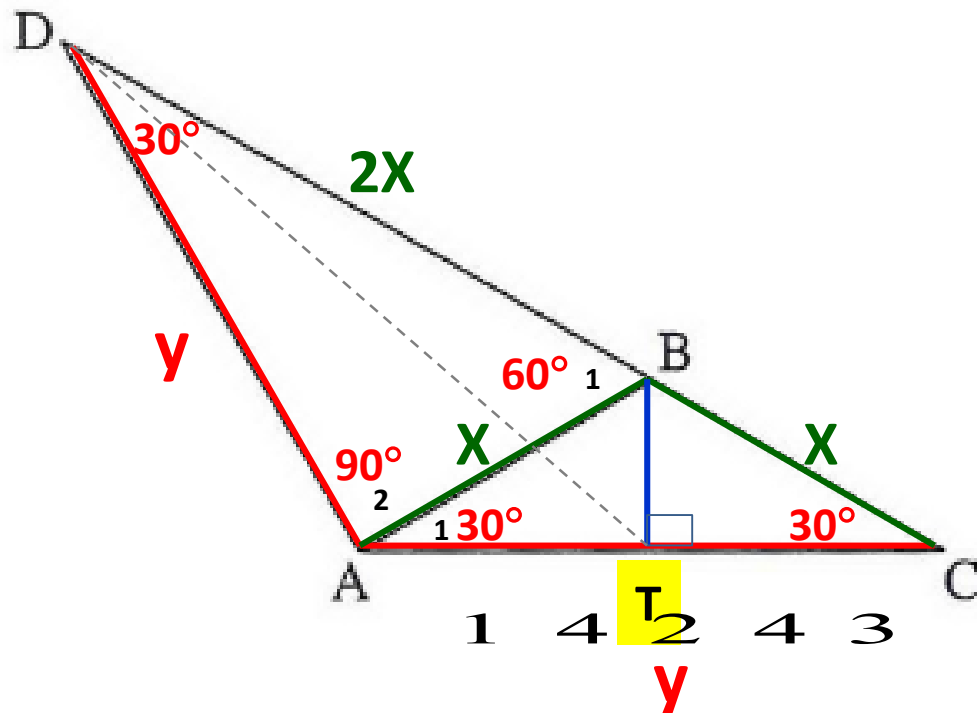
דיון – סעיף ב'

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

מצא את האורך של הקטע DT





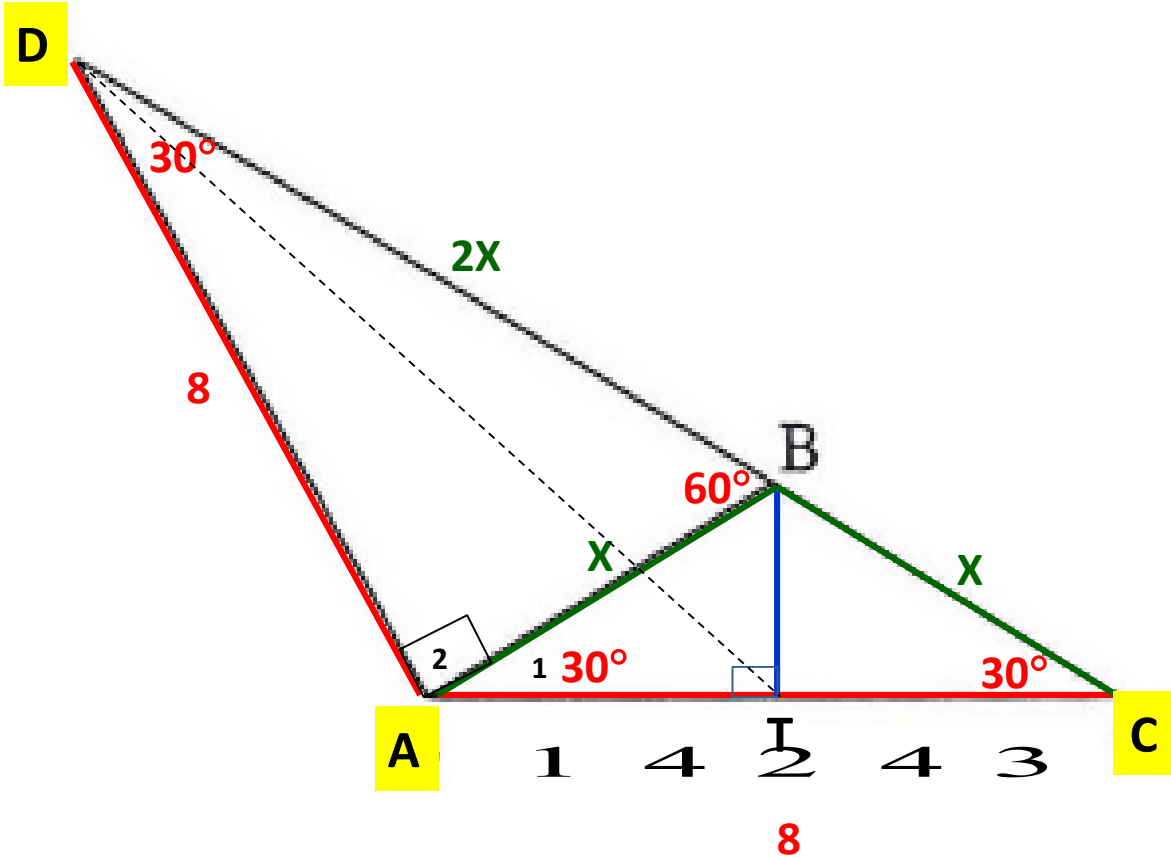
ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

מצא את האורך של הקטע DT

$$S_{\triangle ADC} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{y \cdot y \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\triangle ADC} = 16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot y^2}{4} \Rightarrow y^2 = 64 / \sqrt{\quad} \Rightarrow \boxed{y = 8}$$



ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר. $\leftarrow y = 8$

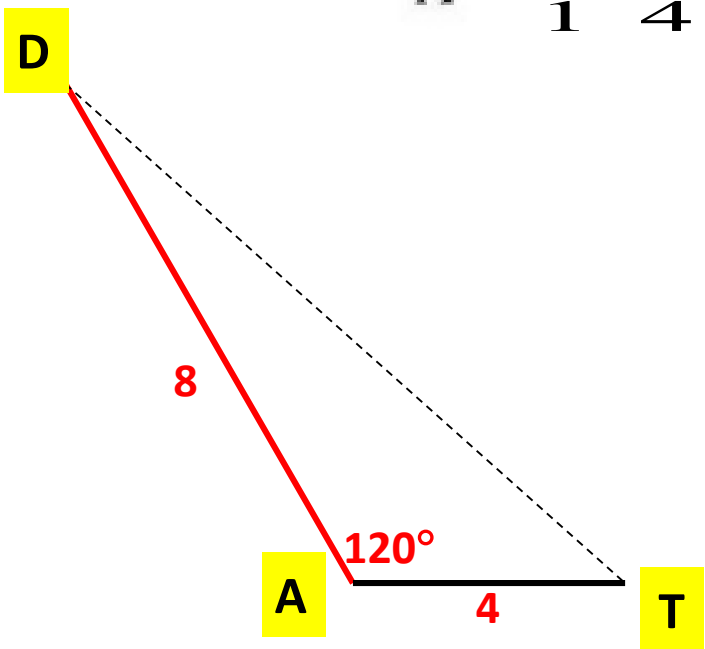
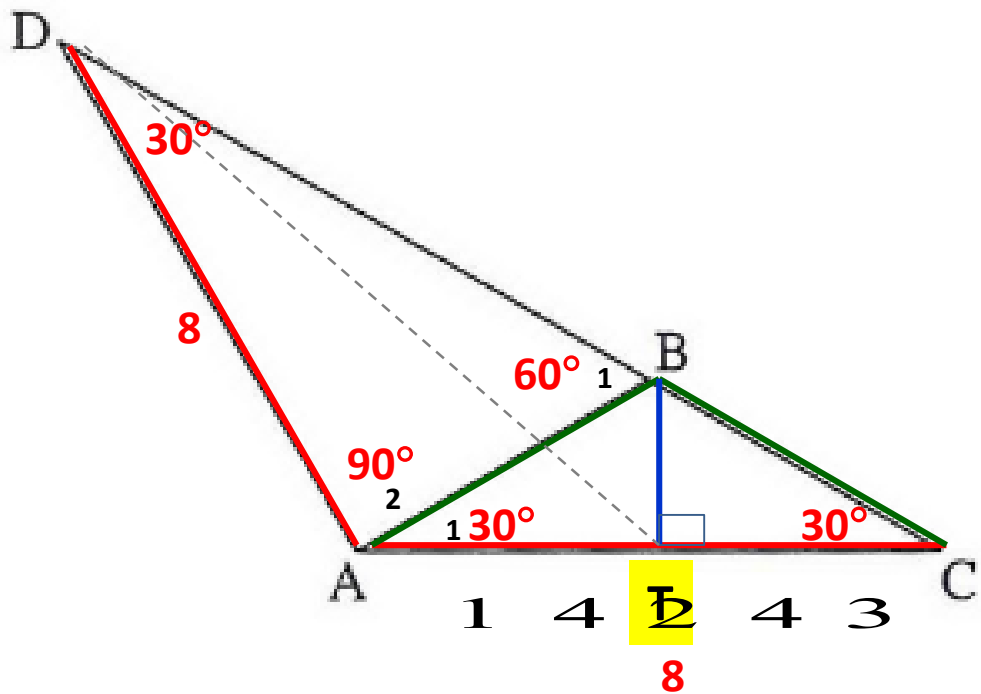
מצא את האורך של הקטע DT

$$y = 8$$

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

מצא את האורך של הקטע DT



$$y = 8$$

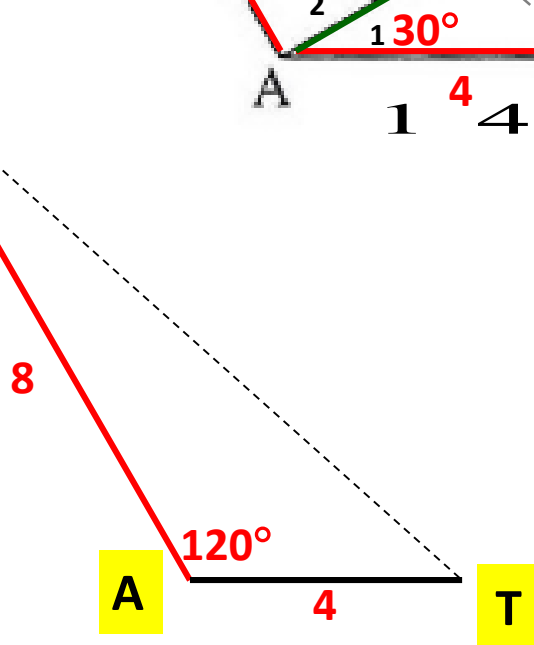
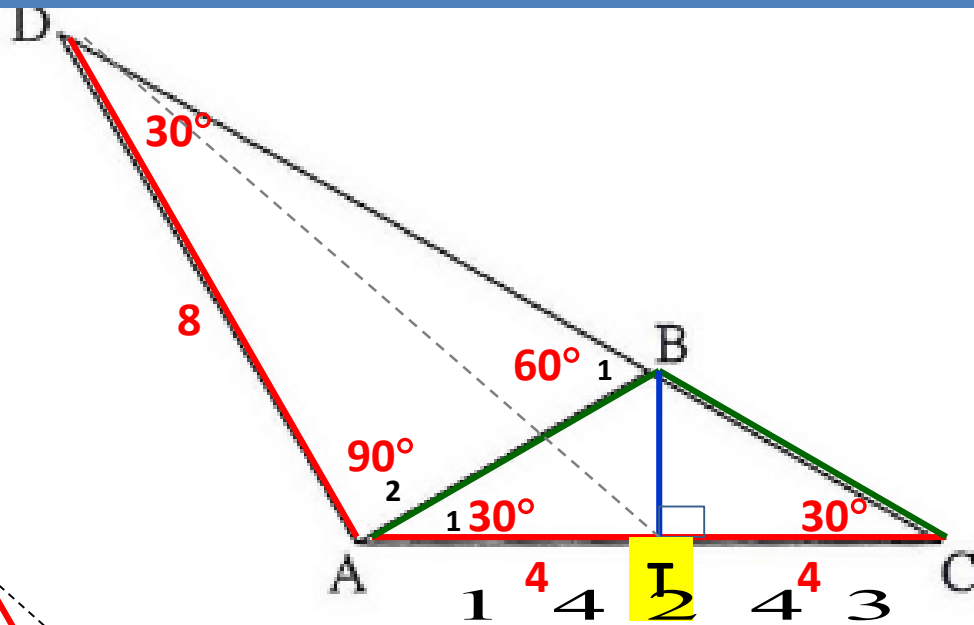
ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר .

מצא את האורך של הקטע DT

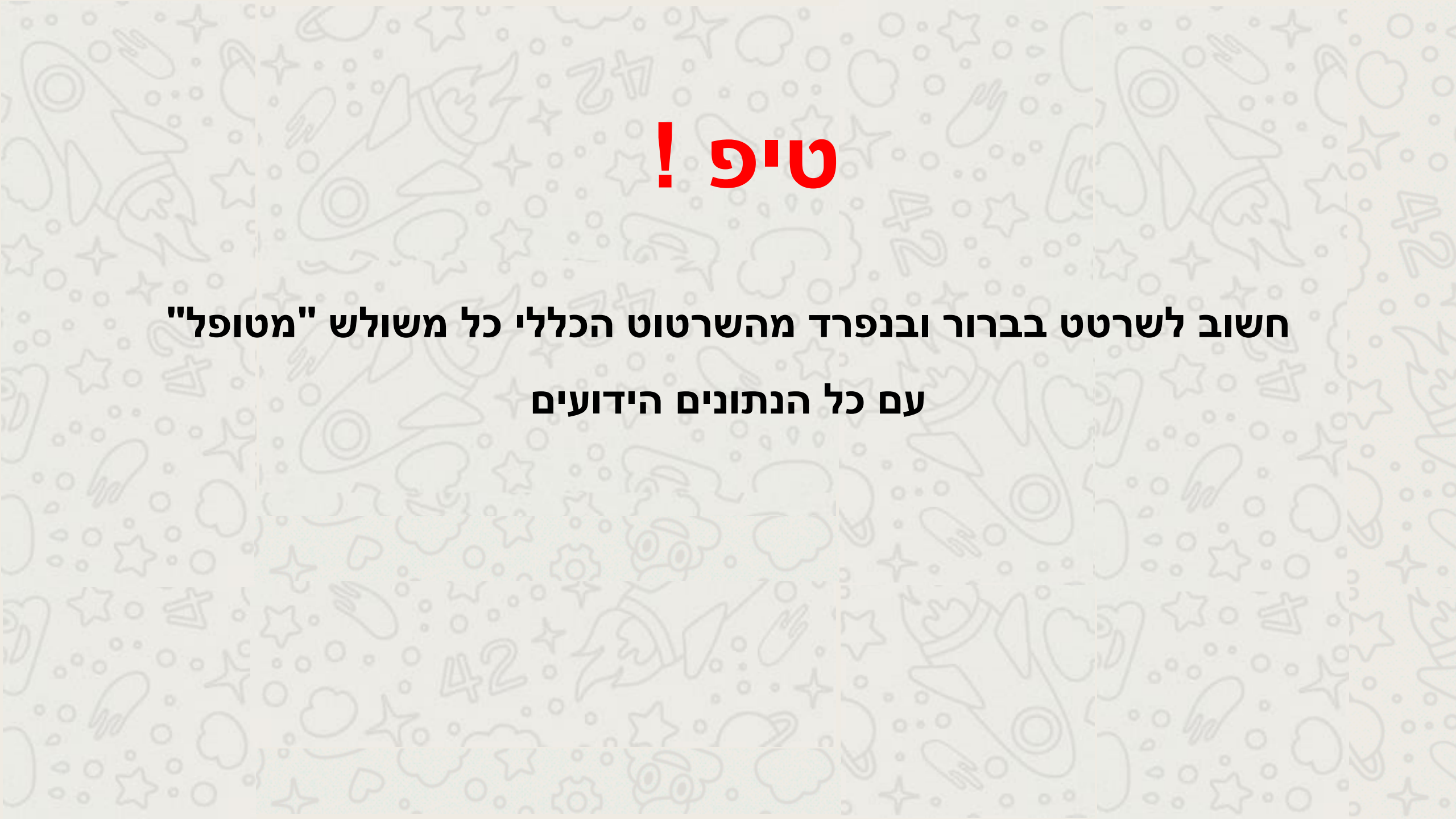
* משפט קוסינוסים במשולש ADT

$$\Delta ADT \Rightarrow DT^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DT^2 = 112 \Rightarrow DT = \sqrt{112} = 10.583$$



אורך הקטע DT: 10.583 ס"מ

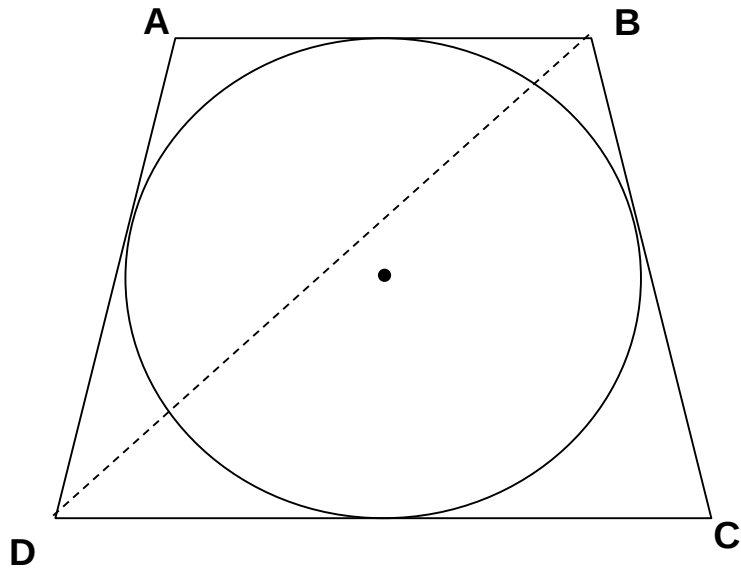


טיפ !

**חשוב לשרטט בברור ובנפרד מהשרטוט הכללי כל משולש "מטופל"
עם כל הנתונים הידועים**

בגרות 806 - קיץ תשע"ה- מועד ב'

שאלה 5 – טריגו בטרפז ישר זווית שחסום בו מעגל



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה שוקיים ABCD.

($AB \parallel DC$), כמתואר בציור .

נתון : $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז .

(2) את השוק של הטרפז .

(3) את אלכסון הטרפז .

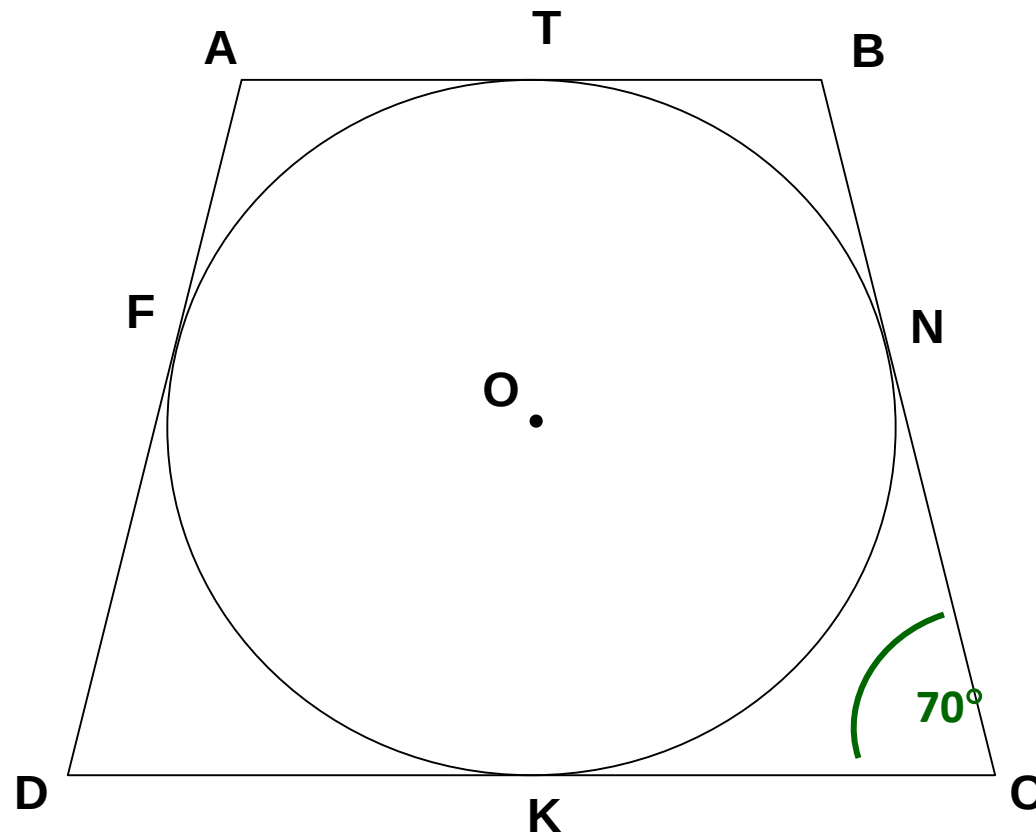
ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז

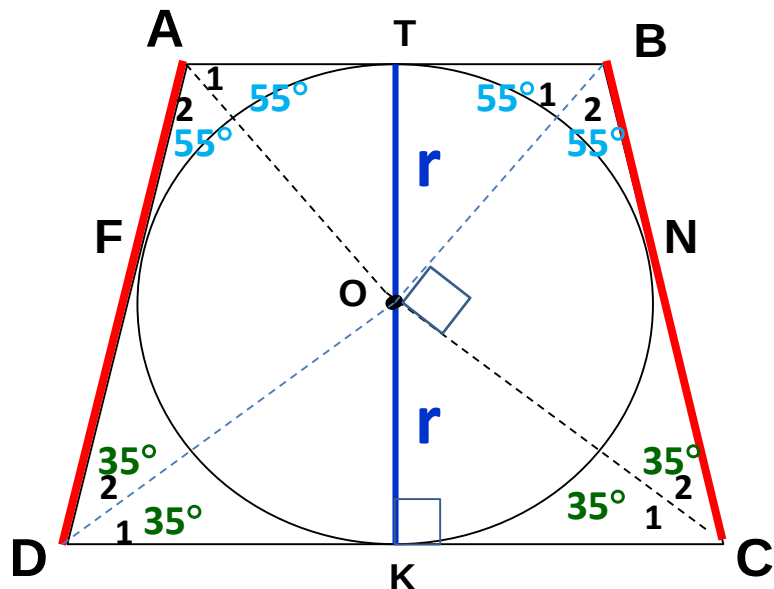
ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

מעגל שרדיוסו r **חסום** בטרפז שווה שוקיים ABCD. $(AB \parallel DC)$, כמתואר בציור.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$. נסמן את נקודות ההשקה – כמו בשרטוט

נשלים את כל הידוע לנו בשרטוט- על מעגל חסום בטרפז ש"ש





מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

($AB \parallel DC$), כמתואר בציור .

נתון : $\angle BCD = 70^\circ$.

* TK – קוטר במעגל החסום (ההוכחה במצגת הנילווית)

* BO , CO , DO , AO – חוצי זוויות

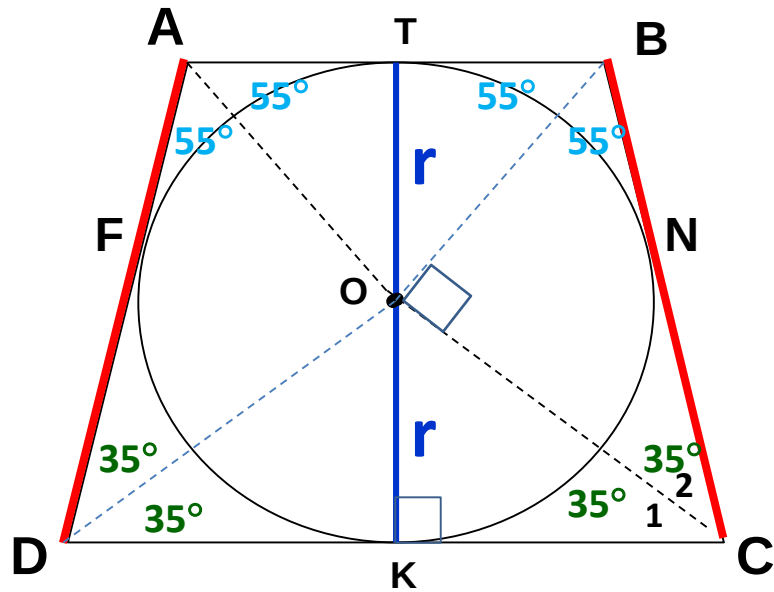
(מרכז מעגל חסום – פגישת חוצי זוויות)

* $\triangle BOC$ – משולש ישר זווית (חוצי זוויות חד צדדיות בין מקבילים מאונכים זה לזה)

* $AD + BC = AB + DC$ – תכונת מרובע חוסם מעגל

* $\triangle DOC$ – משולש ש"ש - OK גובה בו - OK גם תיכון $KC = DK$

* $\triangle AOB$ – משולש ש"ש - OT גובה בו - OT גם תיכון $AT = TB$



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

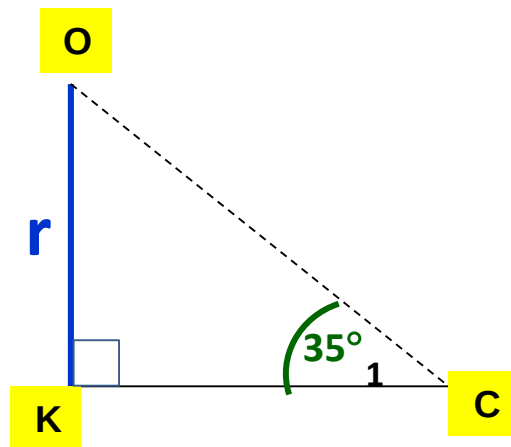
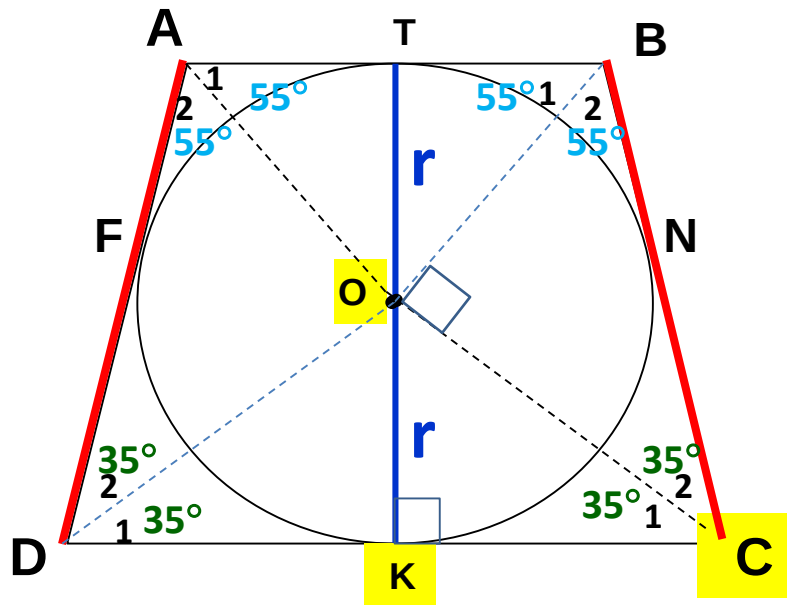
(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

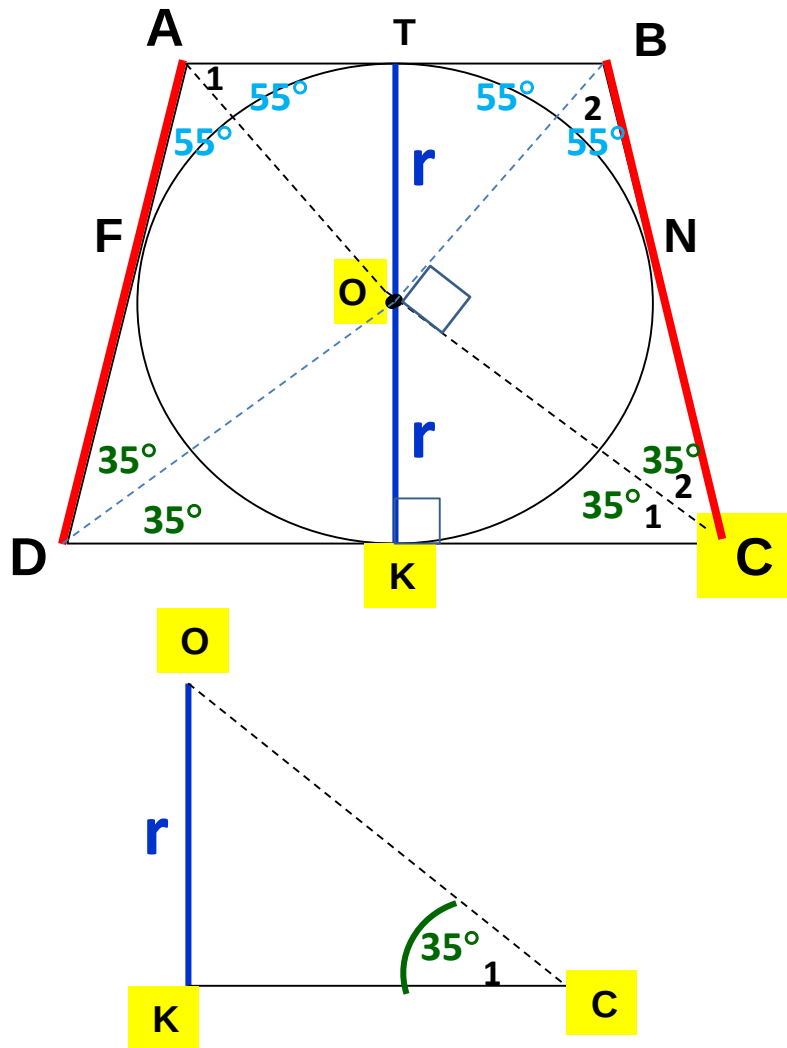
מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.





מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** $ABCD$.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

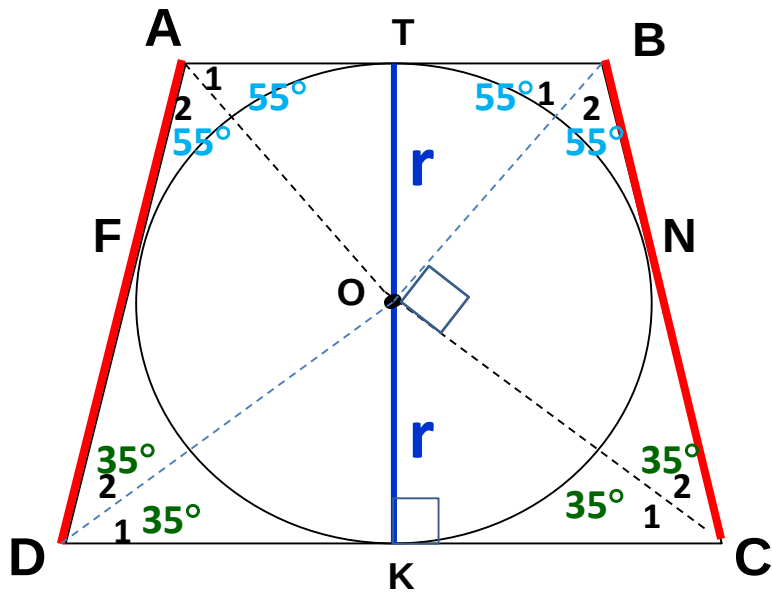
(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

$$\triangle OKC \Rightarrow \tan \angle C_1 = \frac{r}{KC} \Rightarrow \tan 35^\circ = \frac{r}{KC}$$

$$\Rightarrow KC = \frac{r}{\tan 35^\circ} = 1.428r$$

$$DC = 2 KC = 2 \cdot 1.428r = 2.856r$$

$$DC = 2.856 r$$



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(2) את השוק של הטרפז.

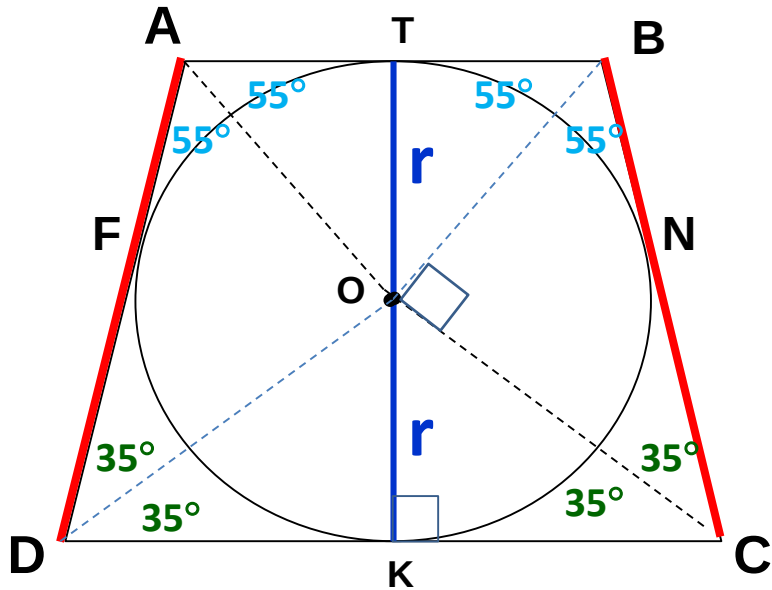
מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה שוקיים $ABCD$.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(2) את השוק של הטרפז.

בניית עזר ?



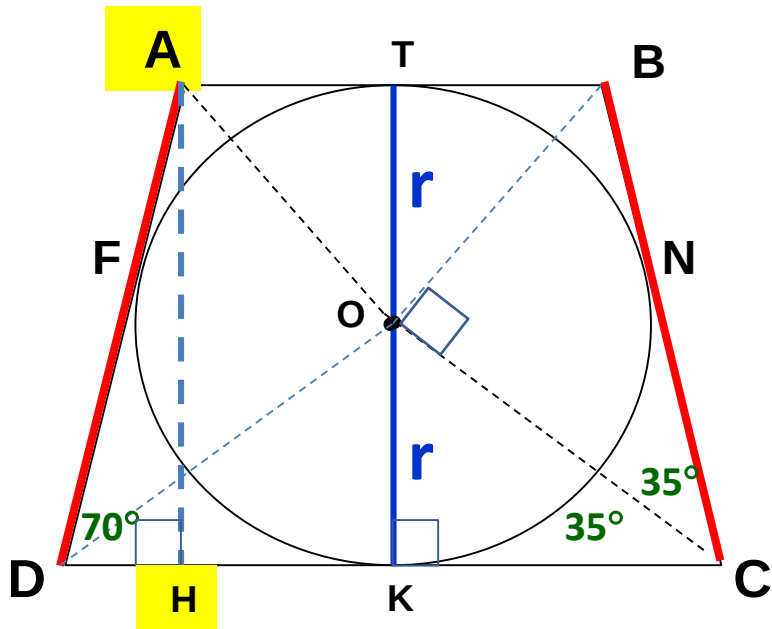
מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה שוקיים ABCD.

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(2) את השוק של הטרפז.

בניית עזר – AH - גובה הטרפז



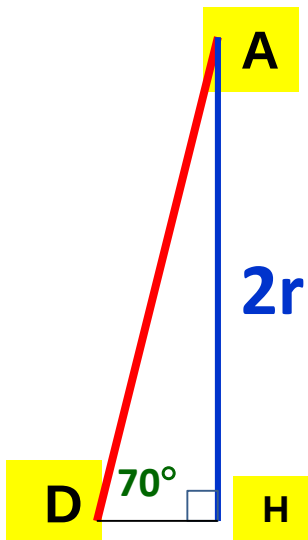
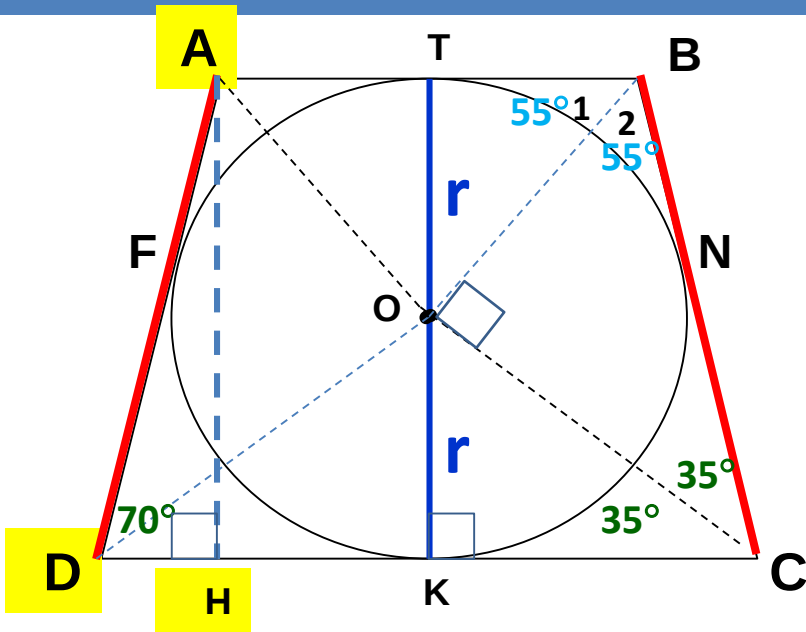
מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

א. הבע באמצעות r :

(2) את השוק של הטרפז .

* המרובע ATKH הוא מלבן (3 זוויות ישרות)

$$AH = TK = 2r \quad \Leftarrow$$

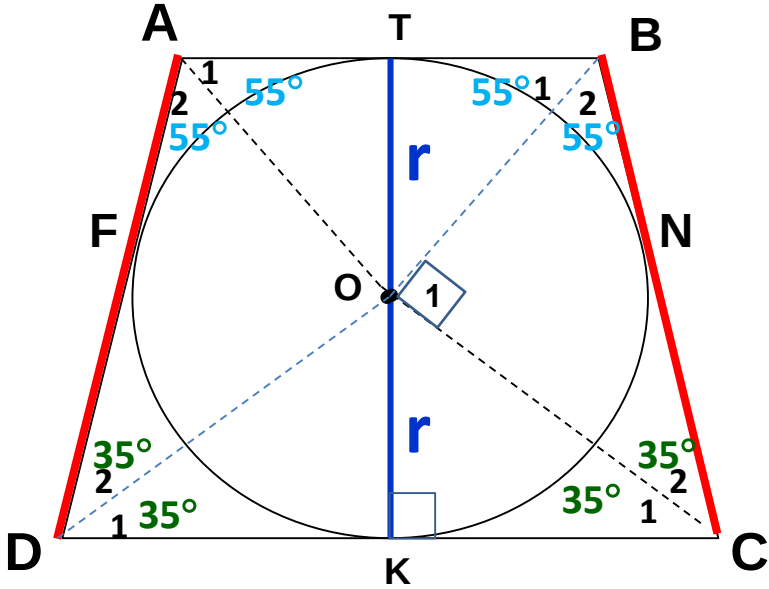


מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה שוקיים ABCD.

נתון : $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

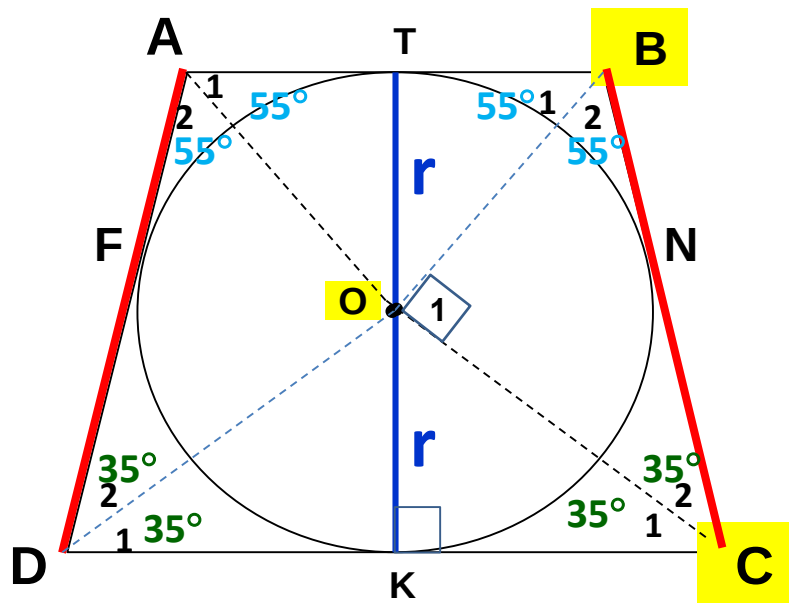
(2) את השוק של הטרפז .



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

א. הבע באמצעות r :

(2) את השוק של הטרפז .



$$\triangle OKC \Rightarrow \sin \angle C_1 = \frac{r}{OC} \Rightarrow \sin 35^\circ = \frac{r}{OC}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{r}{\sin 35^\circ}$$

$$\triangle BOC \Rightarrow \cos \angle C_2 = \frac{OC}{BC} \Rightarrow \cos 35^\circ = \frac{OC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{OC}{\cos 35^\circ} = \frac{\frac{r}{\sin 35^\circ}}{\cos 35^\circ} = \frac{r}{\sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ} = 2.12835r$$

$$AD=BC = 2.12835 r$$

מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

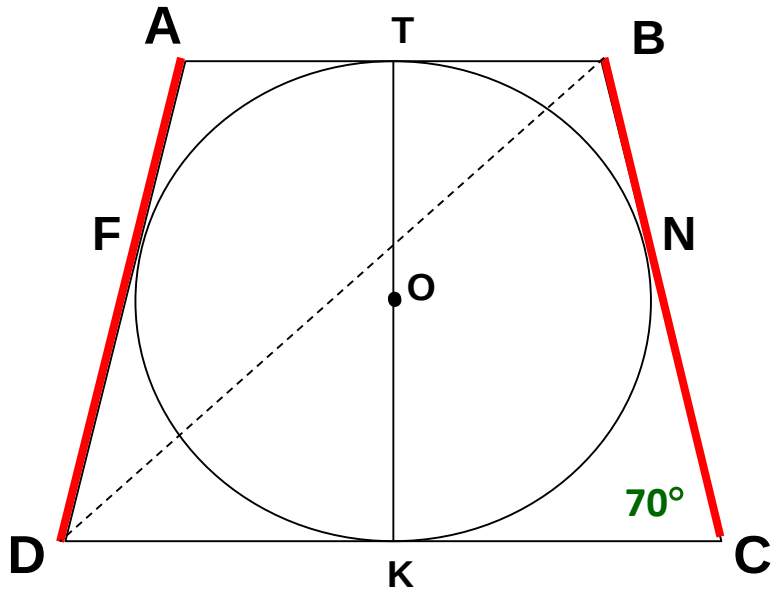
$$DC = 2.856r$$

$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(3) את אלכסון הטרפז.



מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

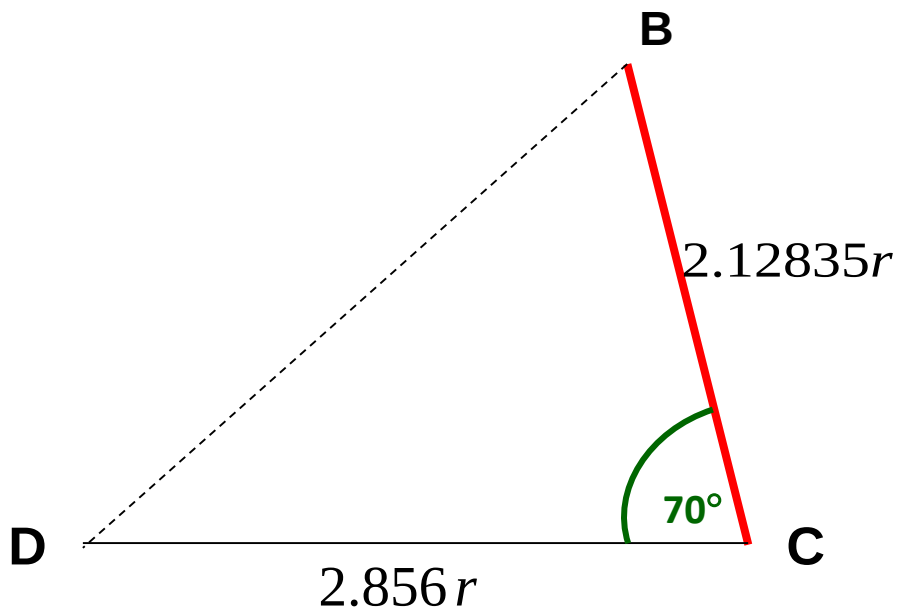
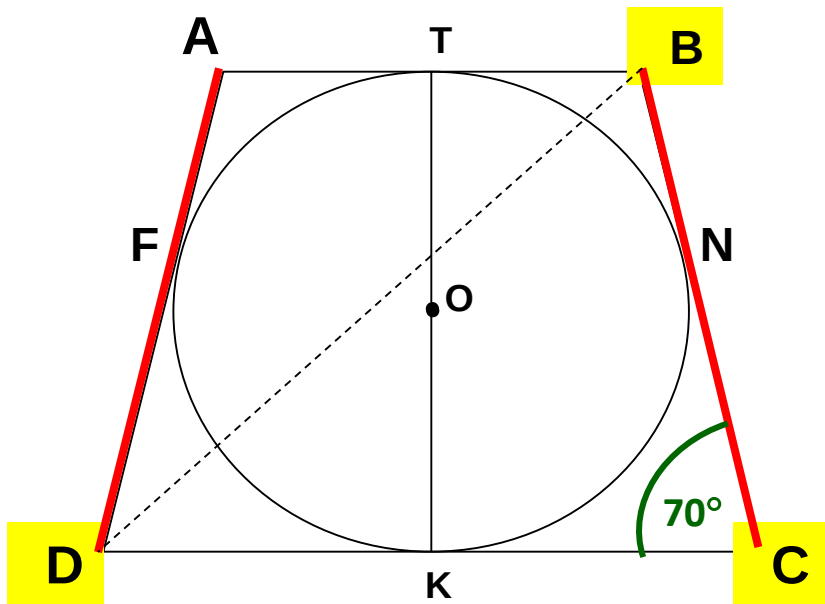
$$DC = 2.856r$$

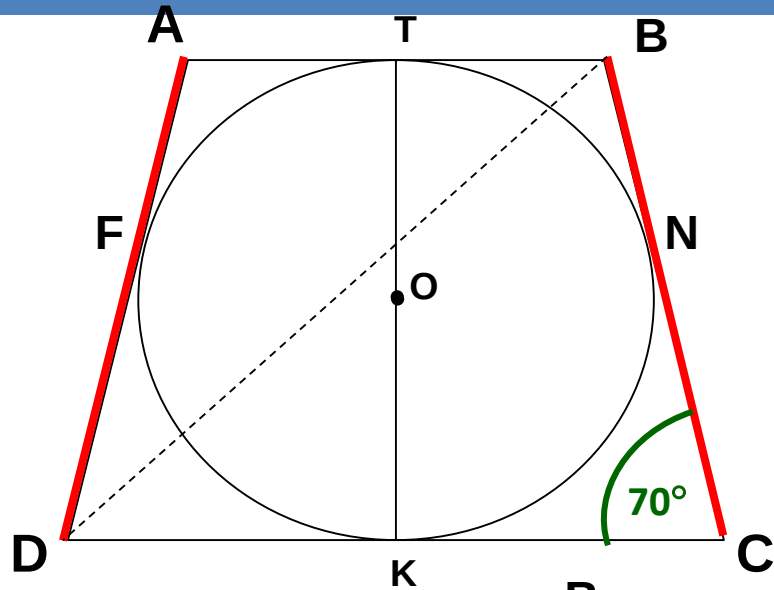
$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

(3) את אלכסון הטרפז.





מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז **שווה שוקיים** ABCD.

$$DC = 2.856r$$

$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r :

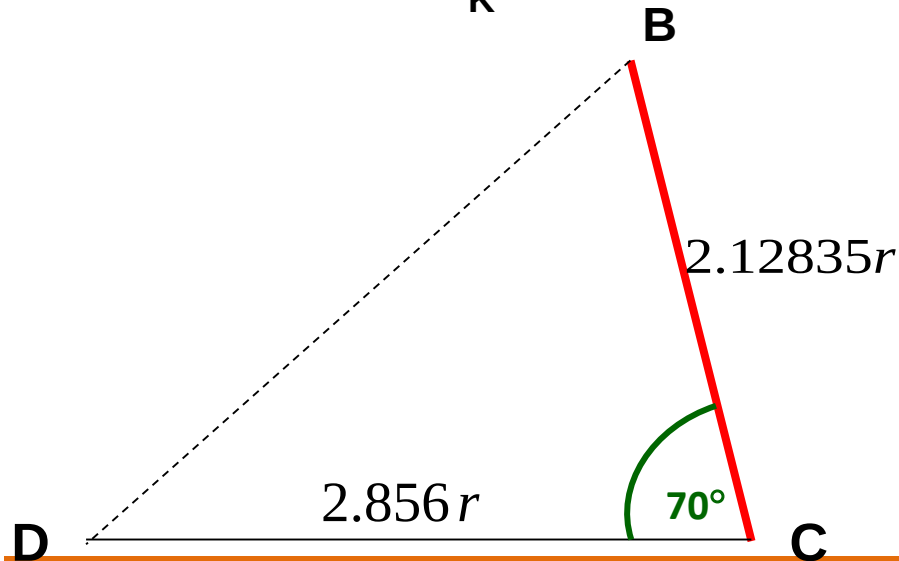
(3) את אלכסון הטרפז.

$$\triangle BDC \Rightarrow$$

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2 \cdot BC \cdot DC \cdot \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow BD^2 = (2.12835r)^2 + (2.856r)^2 - 2 \cdot 2.12835r \cdot 2.856r \cdot \cos 70^\circ$$

$$\Rightarrow BD^2 = 8.5286246 \cdot r^2 \quad / \quad \sqrt{\quad} \Rightarrow \boxed{BD = 2.92r}$$



$$BD = 2.92r$$

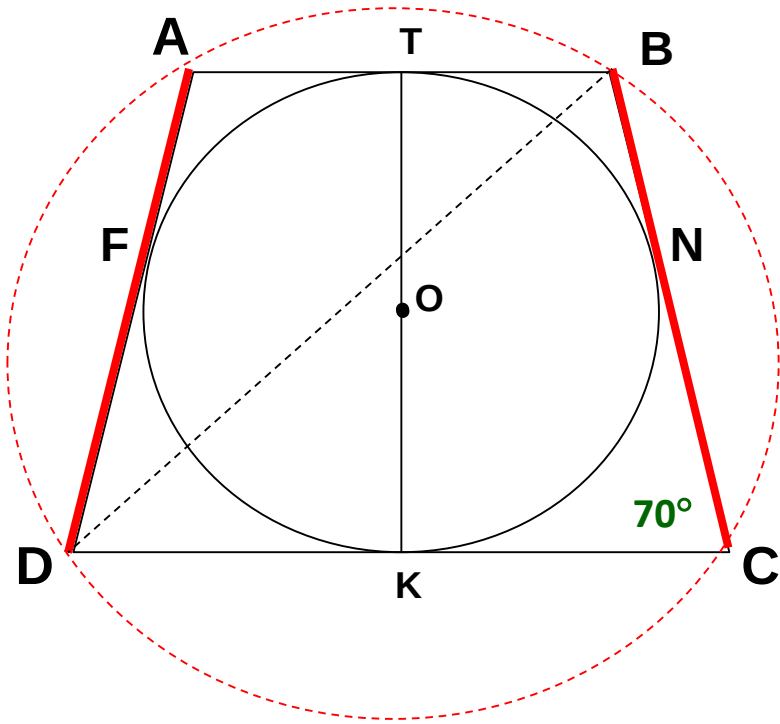
$$DC = 2.856r$$

$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$

$$BD = 2.92r$$

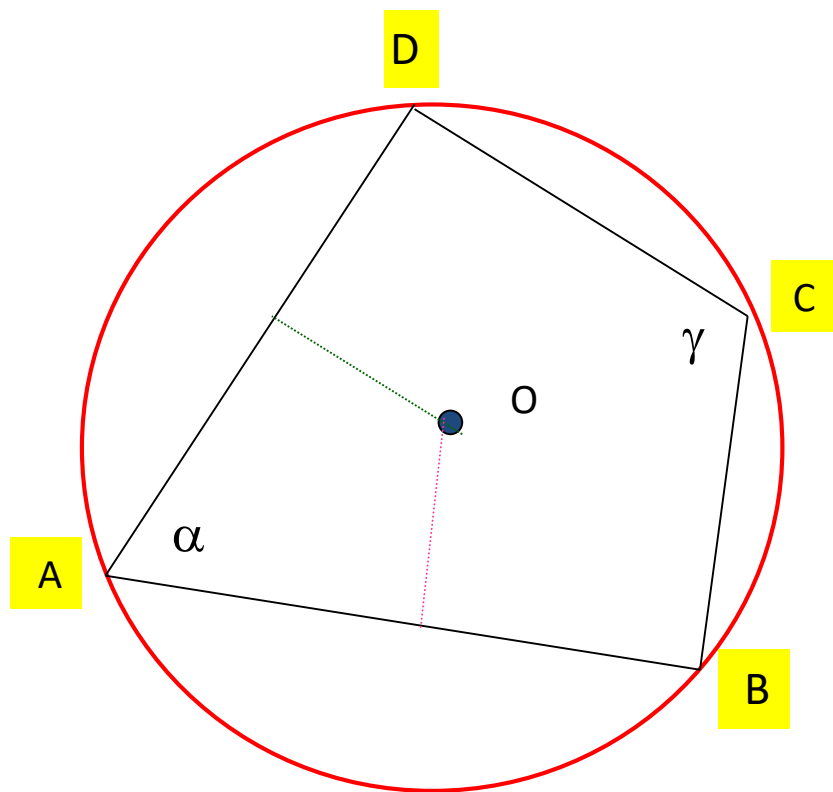
ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז
ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.



מעגל חוסם מרובע

תנאי ש- **למרובע** יהיה מעגל חוסם – סכום הזוויות הנגדיות משלימות ל- 180°

בשרטוט שלנו: $\alpha + \gamma = 180^\circ$



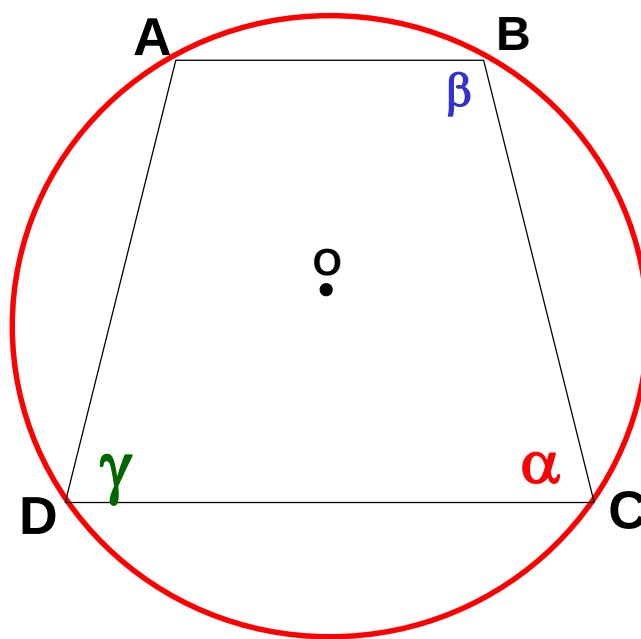
מרכז המעגל החוסם במקרה זה יהיה

פגישת שני אנכים אמצעיים של שני צלעות המרובע

(כל ארבעת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת- מרכז המעגל)

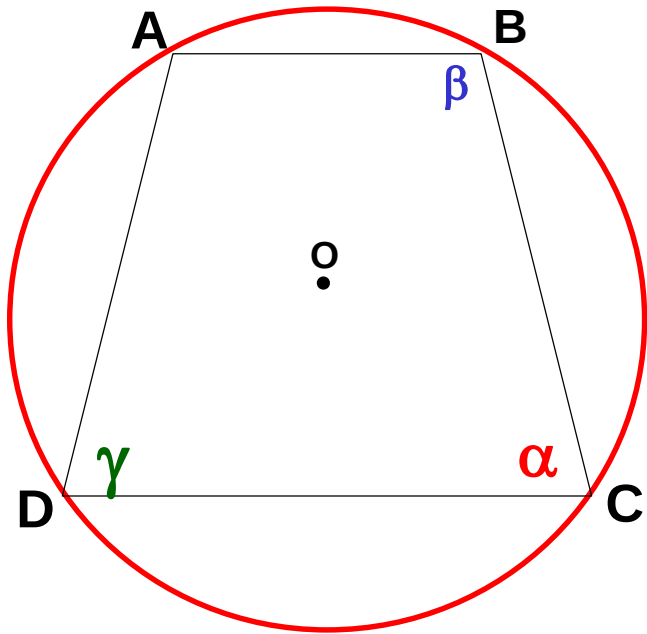
מעגל חוסם טרפז

תנאי ש- **לטרפז** יהיה מעגל חוסם – שהטרפז יהיה שווה שוקיים



מעגל חוסם טרפז

תנאי ש **לטרפז** יהיה מעגל חוסם – שהטרפז יהיה שווה שוקיים



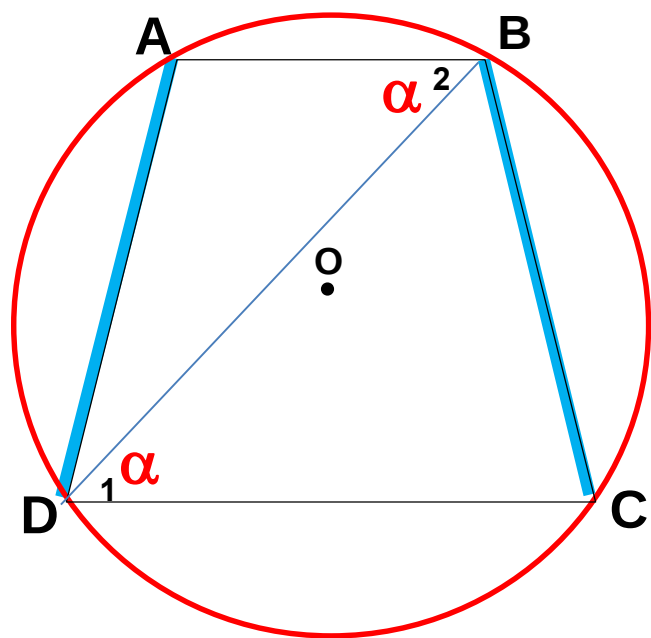
(טרפז עם זוויות בסיס שוות)
הוא טרפז שווה שוקיים)

תנאי שלמרובע יהיה מעגל חוסם : $\beta + \gamma = 180^\circ$
 $\beta + \alpha = 180^\circ$
 $\Leftrightarrow DC \parallel AB$
 ז' חד צדדיות בין מקבילים – שוות

$$\alpha = \gamma$$

הטרפז שווה שוקיים

אם בשאלה נתון שטרפז חסום במעגל - קל להראות שהוא שווה שוקיים



זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות
לקשתות שוות שייכים מיתרים שווים

$$AD = DC$$

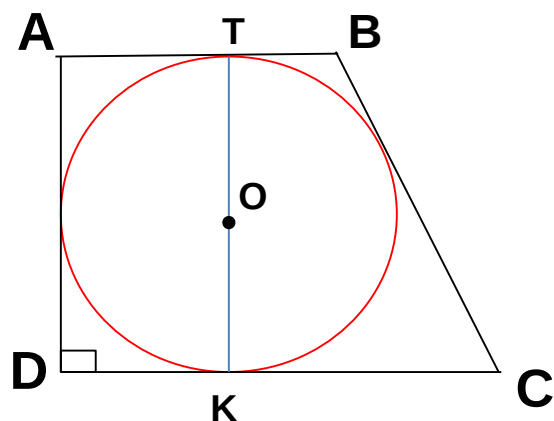
$$\angle D_1 = \angle B_2 \Leftrightarrow DC \parallel AB$$

ז' מתחלפות בין
מקבילים – שוות

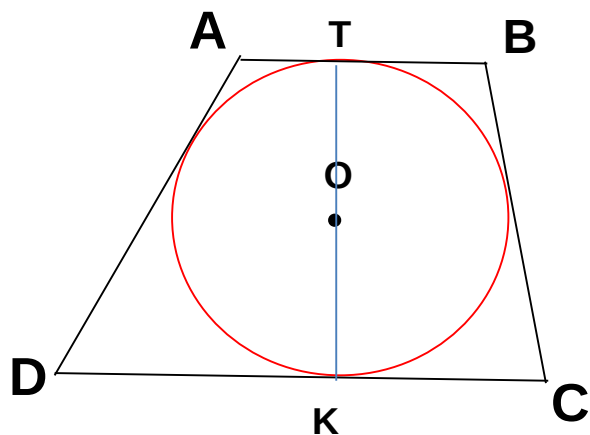
ABCD טרפז שווה שוקיים

מעגל חסום בטרפז

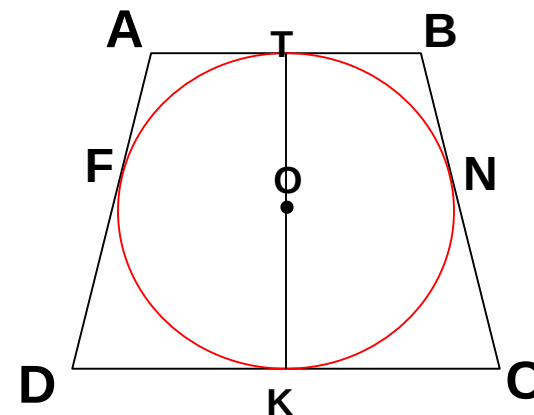
תנאי שלמרובע יהיה מעגל חסום – סכום זוג צלעות נגדי אחד – שווה לסכום זוג צלעות נגדי שני



טרפז ישר זווית



טרפז כללי



טרפז ש"ש

$$AB + DC = AD + BC \quad \text{בכולם מתקיים :}$$

* מרכז המעגל החסום בטרפז – פגישת חוצי זוויות הטרפז

* הקטע המחבר את נקודות ההשקה של הבסיסים למעגל – הוא קוטר (TK)

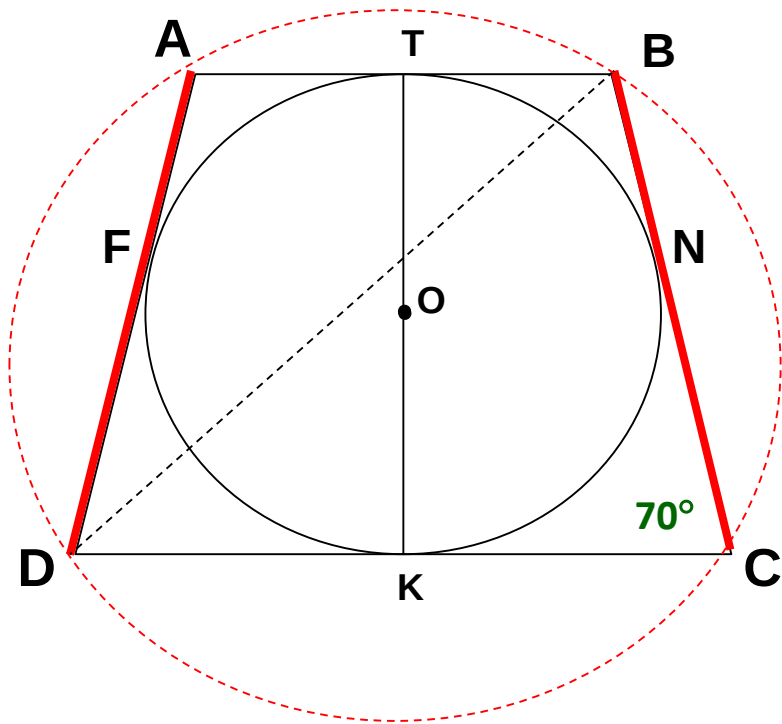
$$DC = 2.856r$$

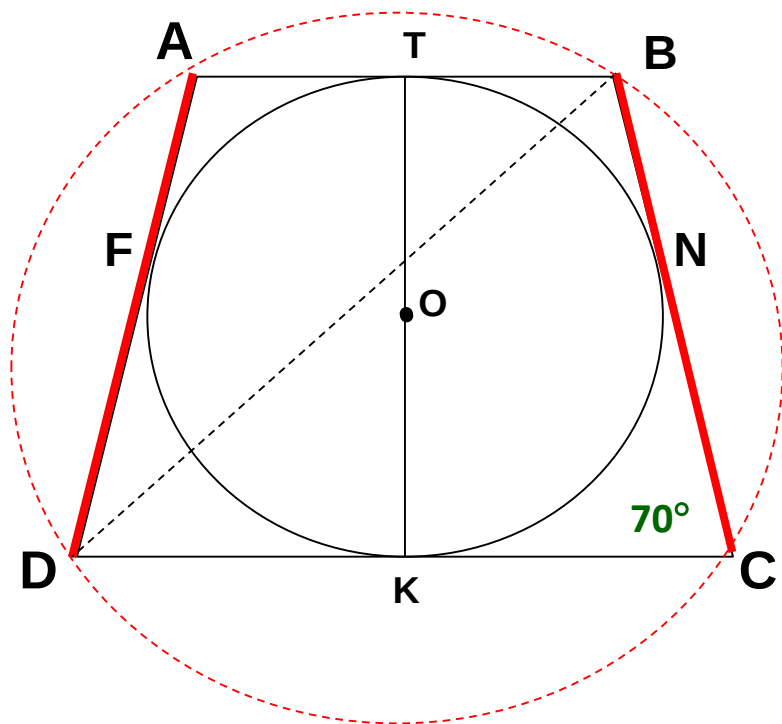
$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$

$$BD = 2.92r$$

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז
ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.





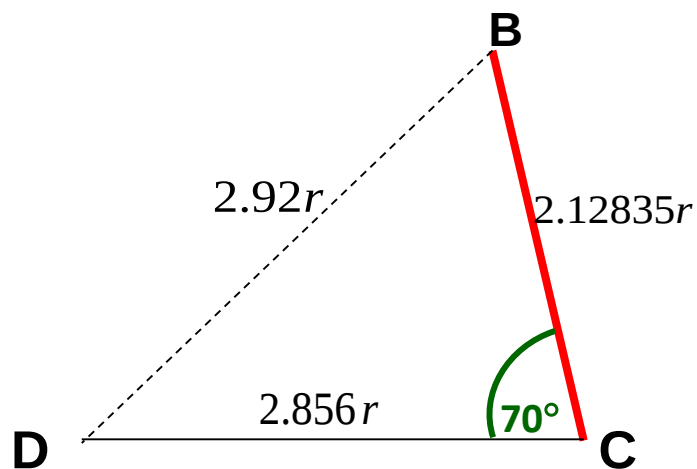
$$DC = 2.856r$$

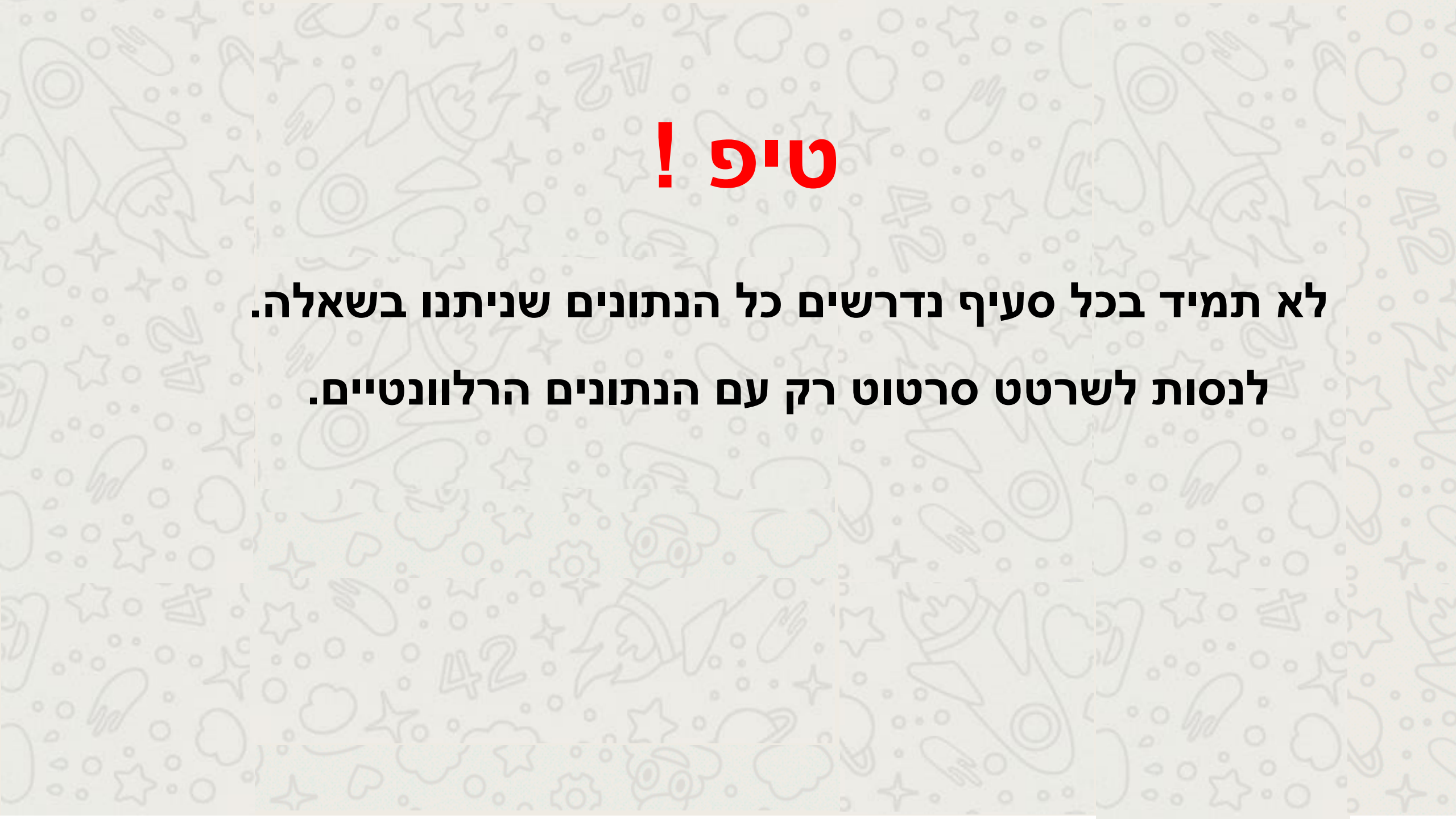
$$BC = 2.12835r$$

נתון: $\angle BCD = 70^\circ$

$$BD = 2.92r$$

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז
ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.





טיפ !

**לא תמיד בכל סעיף נדרשים כל הנתונים שניתנו בשאלה.
לנסות לשרטט סרטוט רק עם הנתונים הרלוונטיים.**