



שאלון 581 (806)

סדרות

10/04/2019

סדרות:	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
איבר n-י:	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום:	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אינסופי: $S = \frac{a_1}{1 - q}$

בגרות 806 - קיץ תש"ע- מועד ב' 14.7.10

שאלה 2 – סדרה חשבונית – עם פרמטרים

a_n ו- a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- k בהתאמה .

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$.
 m - מספר טבעי , $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n + k + m - 2)$

(2) הבע באמצעות n , k , ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של

שני האיברים a_n ו- a_k .

ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d , ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$

(2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$

סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו- d .

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$.
 m - מספר טבעי, $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n + k + m - 2)$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a_n ו- a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- k בהתאמה.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

הפרש הסדרה הוא d , והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$

m - מספר טבעי, $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

$$a_n + a_k = \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n} + \underbrace{a_1 + (k-1)d}_{a_k} = a_1 + a_1 + (n-1)d + (k-1)d =$$

$$a_1 + \underbrace{md}_{a_1} + (n-1)d + (k-1)d =$$

$$a_1 + d(m+n-1+k-1) =$$

$$a_1 + d(n+k+m-2)$$

הראנו שמתקיים: $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a. (1) \text{ הראנו כי מתקיים } a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$$

(2) הבע באמצעות n , k , ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של

שני האיברים a_n ו- a_k .

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$

(2) הבע באמצעות n , k , ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של

שני האיברים a_n ו- a_k .

אנו מחפשים t כך שיתקיים:

$$a_n + a_k = a_t$$

מסעיף א' (1)

איבר כללי בסדרה חשבונית

$$a_1 + d(n+k+m-2) = a_1 + d(t-1)$$

$$n+k+m-2 = t-1$$

$$n+k+m-1 = t$$

$$n+k+m-1$$

המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_k הוא:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = md$$

$$a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2) \quad \text{א. (1) הראנו כי מתקיים}$$

$$a_{34} + a_{65} \quad \text{ב. (1) הבע באמצעות } a_1, d, \text{ ו- } m \text{ את הסכום}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_1 = md$$

א. (1) הראנו כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n + k + m - 2)$

ב. (1) הבע באמצעות a_1 , d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$

$$a_n + a_k = a_1 + d(n + k + m - 2) \quad \text{נציב } n=34, k=65$$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(34 + 65 + m - 2) = a_1 + d(m + 97)$$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97)$$

נתון : $a_1 = md$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97)$$

ב. (1) הראנו כי מתקיים

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

מצא את a_1 ו- d .

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

$$\text{נתון: } a_1 = md$$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97)$$

ב. (1) הראנו כי מתקיים

ב. (2) נתון: $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

מצא את a_1 ו- d .

נפתור סעיף זה בלי קשר לסעיף ב (1)

נתאר את הנתונים באמצעות d ו- a_1

$$(1) \quad a_{34} + a_{65} = a_{109}$$

$$\underbrace{a_1}_{a_{34}} + \underbrace{33d}_{a_{65}} + \underbrace{a_1}_{a_{109}} + \underbrace{64d}_{a_{109}} = \underbrace{a_1}_{a_{109}} + \underbrace{108d}_{a_{109}} \Rightarrow a_1 + 97d = 108d \Rightarrow (1) \quad a_1 = 11d$$

נתון : $a_1 = md$

ב. (1) הראנו כי מתקיים $a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97)$

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

מצא את a_1 ו- d .

נפתור סעיף זה בלי קשר לסעיף ב (1)

(1) $a_1 = 11d$

מהשקף הקודם

$$(2) S_{79} = 7900 \Rightarrow \frac{79}{2} [2 \cdot a_1 + (79-1)d] = 7900$$

$$\Rightarrow \frac{79}{2} (2 \cdot a_1 + 78d) = 7900$$

$$\Rightarrow \frac{79 \cdot 2}{2} (a_1 + 39d) = 7900 \quad / : 79$$

$$\Rightarrow (2) \quad a_1 + 39d = 100$$

$$\begin{cases} (1) \quad a_1 = 11d \\ (2) \quad a_1 + 39d = 100 \end{cases}$$

$$(2) \quad \underbrace{11d}_{a_1} + 39d = 100$$

$$50d = 100$$

$$d = 2 \rightarrow (1) \quad a_1 = 11d = 11 \cdot 2 = 22$$

$$\text{נתון: } a_1 = md$$

$$a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97)$$

ב. (1) הראנו כי מתקיים

ב. (2) נתון: $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900.
מצא את a_1 ו- d .

$$\left. \begin{array}{l} a_{34} + a_{65} = a_{109} = a_1 + (109 - 1)d = a_1 + 108d \quad \text{נתון:} \\ a_{34} + a_{65} = a_1 + d(m + 97) \quad \text{מסעיף ב' (1)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 + d(m + 97) = a_1 + 108d \Rightarrow \\ d(m + 97) = 108d \quad / : d \\ m + 97 = 108 \Rightarrow \\ m = 11 \end{array}$$

$$a_1 = md = 11d$$

בשקף הקודם הראנו : $m = 11$ ← $a_1 = md = 11d$

ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7,900 .

מצא את a_1 ו- d .

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

שאלה 1 פתרון – דרך נוספת - סעיף ב' (2)

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

הראנו כבר כי : $m = 11$ ← $a_1 = md = 11d$

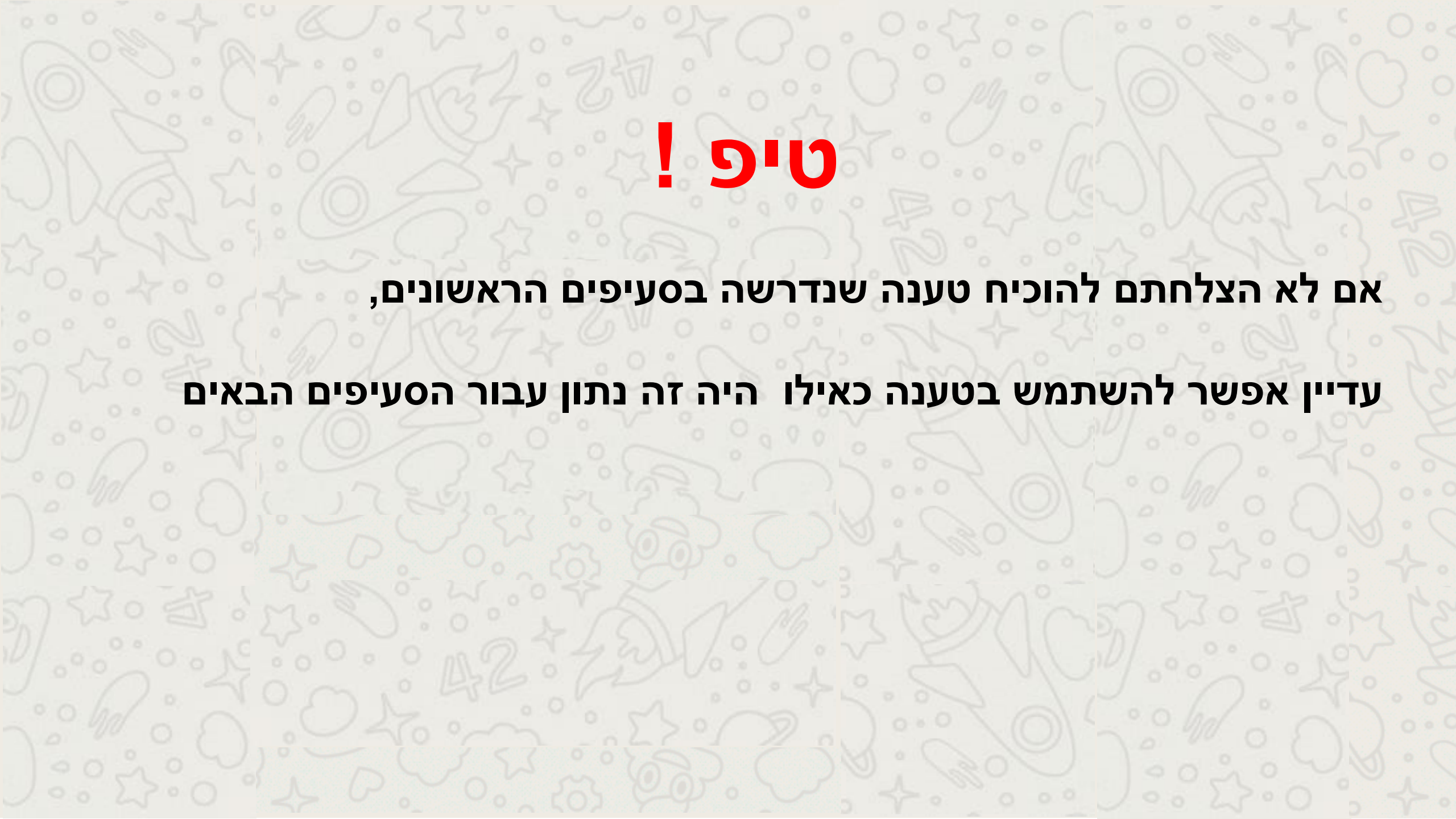
ב. (2) נתון : $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900 .
מצא את a_1 ו- d .

$$S_{79} = 7900 \Rightarrow \frac{79}{2} (2 \cdot 11d + 78d) \Rightarrow$$

$$7900 = \frac{79}{2} \cdot 100d \quad / \cdot 2 \Rightarrow 7900 \cdot 2 = 7900d \Rightarrow d = 2$$

$$a_1 = 11d = 22$$

$$a_1 = 22 , d = 2$$



טיפ !

אם לא הצלחתם להוכיח טענה שנדרשה בסעיפים הראשונים,

עדיין אפשר להשתמש בטענה כאילו היה זה נתון עבור הסעיפים הבאים

בגרות 806 - חורף תשע"ג

שאלה 2 ב' – סדרה חשבונית

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n ($n > 12$)



$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב - K

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$

נסמן את מספר האיברים בסדרה ב- k

לפי הנתון: $d = 4$, $a_1 = 58$

לפי הנוסחה לאיבר כללי בסדרה חשבונית: $(1) a_k = 58 + 4(k-1)$

לפי הנתון:

$(2) a_k = 4n - 6$

←

$$58 + 4(k-1) = 4n + 6$$

$$58 + 4k - 4 = 4n + 6$$

$$54 + 4k = 4n + 6$$

$$4k = 4n - 48 \quad / : 4$$

$$k = n - 12$$

מספר האיברים בסדרה: $n - 12$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$

מצאנו כי מספר האיברים בסדרה הוא : $n - 12$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n ($n > 12$)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$

מצאנו כי מספר האיברים בסדרה הוא $n - 12$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n ($n > 12$)

ניעזר בנוסחה: $(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$

$$S_k = \frac{k}{2} [a_1 + a_k] = \frac{(n-12)}{2} \left[58 + \underset{a_k}{4n+6} \right] = \frac{(n-12)(4n+64)}{2} = \frac{(n-12)2(2n+32)}{2} \Rightarrow$$

$$S_k = (n-12)(2n+32)$$

$$S_k = (n-12)(2n+32)$$

סכום הסדרה :

בגרות קיץ תשע"ג מועד א'

21.5.13

שאלה 2 – סדרה חשבונית - סכום – מעניינת

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

נתאר את הסכום : $S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$



$$S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$$

נתאר את הסכום :

כמה איברים יש בסדרה ?

$$S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2) \quad \text{נתאר את הסכום :}$$

$$b_1 = 2, \quad d = 4, \quad b_k = (4n - 2) \quad S^* \text{ סכום סדרה חשבונית כך ש:}$$

נמצא את K – נתאר אותו באמצעות n

$$a_k = 2 + (k - 1)4 = (4n - 2) \Rightarrow 2 + 4k - 4 = 4n - 2 \Rightarrow 4k - 2 = 4n - 2 \Rightarrow k = n$$

$$S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$$

$$b_1 = 2, \quad d = 4, \quad b_k = (4n - 2), \quad k = n$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

נתאר את S^* בעזרת n

$$S^* = 2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)$$

$$b_1 = 2, \quad d = 4, \quad b_k = (4n - 2), \quad k = n$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שרגילים לה

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

בדף הנוסחאות

נתאר את S^* בעזרת n

$$S^* = (b_1 + b_n) \cdot \frac{n}{2} = (2 + 4n - 2) \cdot \frac{n}{2} = 4n \cdot \frac{n}{2} = 2n^2$$

$$S^* = 2n^2$$

שאלה 2 המשך דיון – תאור S_n סעיף א'

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [1 + 2 + 3 + \dots + (4n - 2)]$$

$$S^* = 2n^2$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה. S^*

$$S^* = 2n^2$$

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)] = n^2 - 5n + 2n^2 = 3n^2 - 5n$$

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

בכל סדרה מתקיים :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$S_n = 3n^2 - 5n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא : $S_n = 3n^2 - 5n$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \underbrace{3n^2 - 5n}_{S_n} - \underbrace{[3(n-1)^2 - 5(n-1)]}_{S_{n-1}} \Rightarrow \dots \Rightarrow a_n = 6n - 8$$

נוסחה לאיבר הכללי a_n : $a_n = 6n - 8$

מסעיף א': $a_n = 6n - 8$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

עלינו לברר איזו סוג סדרה זו

שאלה 2 הוכחה שהסדרה a_n היא סדרה חשבונית – סעיף ב'

מסעיף א'

$$a_n = 6n - 8$$

* נוכיח כי זו סדרה חשבונית

$$a_{n+1} - a_n = \text{קבוע}$$

כדי להוכיח שסדרה היא חשבונית יש להראות ש:

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{6(n+1) - 8}_{a_{n+1}} - \underbrace{(6n - 8)}_{a_n} = 6 \Rightarrow d = 6 \quad \text{קבוע}$$

$$a_n = 6n - 8 \Rightarrow a_1 = 6 \cdot 1 - 8 \Rightarrow a_1 = -2$$

הסדרה היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

הסדרה $a_n = 6n - 8$ היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ-102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה
(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

מיהם האיברים שקטנים מ-102??

הסדרה $a_n = 6n - 8$ היא סדרה חשבונית עם איבר ראשון $a_1 = -2$ והפרש $d = 6$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ-102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה
(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

$$a_n = 6n - 8 = 102$$

$$6n = 110$$

$$n = 18.33$$

$$a_{18} = 6 \cdot 18 - 8 = 100$$

נבדוק מי האיבר הכי קרוב ל-102 :

הסדרה היא : $-2, 4, 10, \dots, 100$

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה נוחה לשימוש

$$d = 6$$

$$n = 18$$

$$a_{18} = 100$$

(לא דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא : -2 , 4 , 10 , , 100

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה נוחה לשימוש

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא : $-2, 4, 10, \dots, 100$

↓
 a_{18}

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה

מופיעה בדף הנוסחאות

$$(1) S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$(2) S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה נוחה לשימוש

$$d = 6$$

$$n = 18$$

$$a_{18} = 100$$

(לא דווקא הסכום של כל האיברים)

הסדרה היא: $-2, 4, 10, \dots, 100$

כדי שהסכום יהיה מקסימלי – נחבר רק את החיוביים כלומר

$$S = \underbrace{4 + 10 + 16 + \dots + 100}_{17 \text{ איברים}} = \frac{(4 + 100) \cdot 17}{2} = 884$$

הערך הגדול ביותר שיכול לקבל סכום מסוים של איברים כאלה הוא 884

טיפ !

* לזיהוי סוג סדרה :

בשאלה שלנו

$$a_n = 6n - 8$$

* איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot n + b$

מייצג סדרה חשבונית (הפרש $d = a$)

* * איבר כללי במבנה : $a_n = a \cdot b^n$

מייצג סדרה הנדסית (המנה $q = b$)

הוכחות בשקפים הבאים

$$a_n = a \cdot n + b$$

$$a_{n+1} = a \cdot (n+1) + b = an + a + b$$

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{an + a + b}_{a_{n+1}} - \underbrace{(a \cdot n + b)}_{a_n} = an + a + b - a \cdot n - b = a$$

הראינו שהפרש בין כל שני איברים סמוכים קבוע - a $\longrightarrow$ $a_{n+1} - a_n = a$

כלומר: איבר כללי במבנה: $a_n = a \cdot n + b$

מייצג סדרה חשבונית (הפרש $d = a$)

$$a_n = a \cdot b^n$$

$$a_{n+1} = a \cdot b^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot b^{n+1}}{a \cdot b^n} = b$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = b \longrightarrow \text{הראינו שהמנה בין כל שני איברים סמוכים קבוע - } b$$

כלומר:

$$a_n = a \cdot b^n \quad \text{איבר כללי במבנה :}$$

מייצג סדרה הנדסית (המנה $q = b$)

שאלון 806- קיץ תשע"ה – מועד א'

סדרה הנדסית אין סופית יורדת – מעניינת

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים....., a_n ,, a_3 , a_2 , a_1 ,
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,
אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460.

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים....., a_n ,, a_3 , a_2 , a_1
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,
אחד לפניו ואחד אחריו.
א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

a_1, a_2, a_3

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

$$a_2 = \frac{2}{5}(a_1 + a_3)$$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו - בפרט מתקיים ש:

$$a_1 q = \frac{2}{5}(a_1 + a_1 q^2)$$

$$a_1 q = \frac{2}{5} a_1 (1 + q^2) \quad / : (a_1 > 0)$$

$$q = \frac{2}{5}(1 + q^2) \quad / \cdot 5$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q - 1)(q - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad q = 2$$

בסדרה הנדסית אין סופית
 $|q| < 1$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$$

$$\frac{a_n}{q}, a_n, a_n \cdot q$$

$$a_n = \frac{2}{5} (a_{n-1} + a_{n+1})$$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$$

$$\frac{a_n}{q}, a_n, a_n \cdot q$$

$$a_n = \frac{2}{5}(a_{n-1} + a_{n+1})$$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n . a_{n-1}, a_n, a_{n+1}

$$\frac{a_n}{q}, a_n, a_n \cdot q$$

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_n = \frac{2}{5} (a_{n-1} + a_{n+1})$$

$$a_n = \frac{2}{5} \left(\frac{a_n}{q} + a_n \cdot q \right)$$

$$a_n = \frac{2a_n}{5} \left(\frac{1}{q} + q \right) / : a_n (a_n > 0)$$

$$1 = \frac{2}{5} \left(\frac{1+q^2}{q} \right) / \cdot 5q$$

$$5q = 2(1+q^2)$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q-1)(q-2) = 0 \Rightarrow$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad q = 2$$

בסדרה הנדסית אין סופית
 $|q| < 1$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$a_{n+2} = a_n \cdot q^2$$

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$$

$$a_n, a_n \cdot q, a_n \cdot q^2$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{5} (a_n + a_{n+2})$$

$$a_n q = \frac{2}{5} (a_n + a_n \cdot q^2)$$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת שכל איבריה חיוביים $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו,

אחד לפניו ואחד אחריו. א. מצא את המנה של הסדרה a_n, a_{n+1}, a_{n+2} .

כל איבר הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני צדדיו $a_{n+1} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+2})$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$a_{n+2} = a_n \cdot q^2$$

$$a_n q = \frac{2}{5}(a_n + a_n \cdot q^2)$$

$$a_n q = \frac{2a_n}{5}(1 + q^2) \quad / : a_n \quad (a_n > 0)$$

$$q = \frac{2}{5}(1 + q^2) / \cdot 5q$$

$$5q = 2(1 + q^2)$$

$$5q = 2 + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2q - 1)(q - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$q = \frac{1}{2}, \quad q = 2$$

בסדרה הנדסית אין סופית
 $|q| < 1$

המנה של הסדרה a_n היא $q = 0.5$

מסעיף א' - נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

שאלה 3 פתרון - סעיף ב' (1) – בדרך המקובלת

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{קבוע}$$

כדי להראות שהסדרה b_n היא הנדסית עלינו להראות שמתקיים :

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$$

$$a_n, a_n \cdot q, a_n \cdot q^2$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+2}}{(a_{n+1})^2}}{\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}} = \frac{a_{n+2} \cdot (a_n)^2}{(a_{n+1})^2 \cdot a_{n+1}} = \frac{a_n \cdot q^2 \cdot (a_n)^2}{(a_n \cdot q)^2 \cdot a_n \cdot q} = \frac{a_n \cdot q^2 \cdot a_n^2}{a_n^2 \cdot q^2 \cdot a_n \cdot q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

קבוע – לא תלוי ב- n

מסעיף א' - נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

איך נפשט את הצגת b_n

שאלה 3 הצגת b_n בצורה נוחה יותר- סעיף ב' (1)

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

הצגת b_n בצורה נוחה יותר

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2} = \frac{a_n \cdot q}{(a_n)^2} = \frac{q}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}}{a_n} = \frac{1}{2a_n}$$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{קבוע}$$

כדי להראות שהסדרה b_n היא הנדסית עלינו להראות שמתקיים :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2a_{n+1}}}{\frac{1}{2a_n}} = \frac{2a_n}{2a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n \cdot q} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \leftarrow \text{קבוע} - \text{לא תלוי ב-} n$$

הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם $q = 2$ מנה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

ב. (1) הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

מה אפשר לחלץ מהמידע של סעיף זה ?

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

ב. (1) הסדרה b_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = 2$

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460 .

מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

אפשר לחלץ מהמידע של סעיף זה את b_1

$$\left. \begin{aligned} S_{10} &= \frac{b_1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = b_1(2^{10} - 1) = b_1 \cdot 1023 \\ S_{10} &= 20460 \end{aligned} \right\} b_1 \cdot 1023 = 20460 \Rightarrow b_1 = 20$$

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (2) – בדרך הרגילה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_1 = 20$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

שאלה 3 המשך דיון - סעיף ב' (2) – בדרך הרגילה

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_1 = 20$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2} \Rightarrow b_1 = \frac{a_2}{(a_1)^2} = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{2}}{(a_1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{a_1} = \frac{1}{2a_1} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2a_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{40} \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{40}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

$$\begin{array}{l} 20 = \frac{1}{2a_1} \\ 40a_1 = 1 \\ a_1 = \frac{1}{40} \end{array}$$

$$S = \frac{1}{20}$$

סכום הסדרה a_n הוא

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_1 = 20$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת a_n שכל איבריה חיוביים שמנתה : $q = \frac{1}{2}$

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

ב. (2) מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

$$b_1 = 20$$

$$b_n = \frac{1}{2a_n}$$

$$\rightarrow b_1 = \frac{1}{2a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{2 \cdot 20} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{40}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{40} \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{40}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

$$S = \frac{1}{20}$$

סכום הסדרה a_n הוא

טיפ !

* שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אפשר להציג :

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \longrightarrow \frac{a_n}{q}, a_n, a_n \cdot q$$

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \longrightarrow a_n, a_n \cdot q, a_n \cdot q^2$$

* שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אפשר להציג :

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \longrightarrow a_n - d, a_n, a_n + d$$

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \longrightarrow a_n, a_n + d, a_n + 2d$$

שאלון 806- קיץ תשע"ג – מועד ב'

סדרת סכומים – כסדרת נסיגה

נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$: II – I , הנדסיות , a_n שתי סדרות

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$, T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II ,

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

איך ניגשים לשאלה כזו ...

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.
א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$S_1 = 3 \Rightarrow S_1 = a_1 = 3$$

$$S_1 = 3, S_2 = b \cdot S_1 + 3 = b \cdot 3 + 3 \Rightarrow S_2 = 3b + 3$$

$$S_2 = 3b + 3, S_3 = b \cdot S_2 + 3 = b \cdot (3b + 3) + 3 = 3b^2 + 3b + 3 \Rightarrow S_3 = 3b^2 + 3b + 3$$

$$S_1 = 3, S_2 = 3b + 3 \Rightarrow a_2 = S_2 - S_1 = \underbrace{3b + 3}_{S_2} - \underbrace{3}_{S_1} = 3b \Rightarrow a_2 = 3b$$

$$S_2 = 3b + 3, S_3 = 3b^2 + 3b + 3 \Rightarrow a_3 = S_3 - S_2 = \underbrace{3b^2 + 3b + 3}_{S_3} - \underbrace{3b + 3}_{S_2} = 3b^2 \Rightarrow a_3 = 3b^2$$

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $b \neq 0$, $S_1 = 3$, $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $b \neq 0$, $S_1 = 3$, $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$(1) \quad S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$$

$$(2) \quad S_n = b \cdot S_{n-1} + 3$$

$$(1) - (2) \quad \underbrace{S_{n+1}}_{a_{n+1}} - \underbrace{S_n}_{a_n} = b \cdot S_n - b \cdot S_{n-1} = b(\underbrace{S_n}_{a_n} - \underbrace{S_{n-1}}_{a_{n-1}})$$

$$a_{n+1} = b \cdot a_n \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = b}$$

הסדרה a_n היא סדרה הנדסית עם מנה $q = b$

נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $b \neq 0, S_1 = 3, S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

בשאלה השנייה שפתרנו הראנו ש:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

נתאר את a_n

נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי : $b \neq 0, S_1 = 3, S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

בשאלה השנייה שפתרנו הראנו ש:

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

נתאר את a_n

$$b \neq 0, a_n = S_n - S_{n-1} = \underset{S_n}{b \cdot S_{n-1} + 3} - S_{n-1} = S_{n-1}(b-1) + 3$$

$$b \neq 0, a_n = S_{n-1}(b-1) + 3$$

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.
א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{קבוע} = q$$

$$b \neq 0, \quad a_n = S_{n-1}(b-1) + 3$$

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.
 א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

$$b \neq 0 , a_n = S_{n-1}(b-1) + 3$$

$$6 \quad 4 \quad 7 \quad 4 \quad 8$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{S_n(b-1) + 3}{S_{n-1}(b-1) + 3} = \frac{(b \cdot S_{n-1} + 3)(b-1) + 3}{S_{n-1}(b-1) + 3} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b \cdot S_{n-1}(b-1) + 3(b-1) + 3}{S_{n-1}(b-1) + 3} = \frac{b \cdot S_{n-1}(b-1) + 3b - 3 + 3}{S_{n-1}(b-1) + 3} =$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b[S_{n-1}(b-1) + 3]}{S_{n-1}(b-1) + 3} = b$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II :

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$, T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I,

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$, M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II,

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

נטפל בכל סדרה בנפרד

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית I :

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I ,

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$ **סדרה הנדסית I:** a_n מהסדרה

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I,

$$q_I = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q^2} = q^4 = b^4 \quad \text{מנת הסדרה I:}$$

סדרה I סדרה הנדסית אין סופית מתכנסת $\implies |b| < 1 \implies 0 < b^4 < 1$

$$T = \frac{a_3}{1-b^4} = \frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .

ב. נתון כי $|b| < 1$.

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$

בונים מהסדרה a_n סדרה הנדסית II :

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b .
 ב. נתון כי $|b| < 1$.

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$ **סדרה הנדסית II I :** בונים מהסדרה a_n

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II I

$$q_{II} = \frac{-a_3}{a_1} = \frac{-a_1 \cdot q^2}{a_1} = -q^2 = -b^2 \quad \text{מנת הסדרה II I :}$$

סדרה II I סדרה הנדסית אין סופית מתכנסת $\implies |b| < 1 \implies |-b^2| < 1$

$$M = \frac{a_1}{1 - (-b^2)} = \frac{a_1}{1 + b^2}$$

$$T = \frac{a_1 \cdot b^2}{1 - b^4}$$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I :

$$M = \frac{a_1}{1 + b^2}$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II :

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

$$T = \frac{a_1 \cdot b^2}{1 - b^4}$$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I :

$$M = \frac{a_1}{1 + b^2}$$

M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II :

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

$$\frac{M}{T} = \frac{\frac{a_1}{1+b^2}}{\frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4}} = \frac{a_1}{1+b^2} \cdot \frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4} = \frac{a_1}{(1+b^2)} \cdot \frac{(1-b^4)}{a_1 \cdot b^2} = \frac{(1-b^2) \cdot (1+b^2)}{b^2 \cdot (1+b^2)} = \frac{(1-b^2)}{b^2}$$

$$\frac{M}{T} = \frac{1-b^2}{b^2}$$

היחס

לסיכום ...

מידע חשוב על סדרה חשבונית והנדסית

סדרה חשבונית- איבר כללי - סיכום

סדרה חשבונית: סדרה שההפרש בין כל שני איברים עוקבים – קבוע. ההפרש הקבוע נקרא : d

הדרך להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית $\longrightarrow$ $a_{n+1} - a_n = \text{קבוע} = d$

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

* אם X, Y, Z שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אז: $y - x = z - y \Leftrightarrow y = \frac{x+z}{2}$

מכאן השם: האיבר האמצעי **ממוצע** חשבוני של שני צדדיו

* וכן מתקיים: $x + y + z = k \Rightarrow y = \frac{k}{3}$

* שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית אפשר להציג:

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \rightarrow a_n, a_n + d, a_n + 2d$$

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \rightarrow a_n - d, a_n, a_n + d$$

* איבר כללי במבנה: $a_n = a \cdot n + b$ מייצג איבר כללי של סדרה חשבונית (ההפרש $d = a$)

סכום סדרה חשבונית

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

* נוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית:

$$(1) \quad S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

בדף הנוסחאות

$$(2) \quad S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נוסחה שימושית

$$* \text{ סכום חלקי : } a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = S_m - S_{k-1}$$

* אפשר גם : להסתכל עליה כעל סדרה חשבונית :

שהאיבר הראשון שלה a_k , הפרש d ומס' האיברים : $m - (k-1) = m - k + 1$

$$* \text{ בכל סדרה מתקיים : } a_n = S_n - S_{n-1}$$

* סדרה אשר סכומה מתואר $S_n = a \cdot n^2 + bn$, $a, b \neq 0$, היא סדרה חשבונית

סדרה הנדסית - איבר כללי - סיכום

סדרה הנדסית: סדרה שהמנה בין כל שני איברים עוקבים – קבוע. המנה הקבועה נקראת : q

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{קבוע} = q$$



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

הדרך להוכיח שסדרה היא סדרה הנדסית

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית:

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Leftrightarrow y^2 = x \cdot z \Rightarrow y = \sqrt{x \cdot z}$$

* אם X, Y, Z שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אז:

מכאן השם: האיבר האמצעי **ממוצע** הנדסי של שני צדדיו

* שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית אפשר להציג:

$$a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \rightarrow a_n, a_n \cdot q, a_n \cdot q^2$$

$$a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \rightarrow \frac{a_n}{q}, a_n, a_n \cdot q$$

* איבר כללי במבנה: $a_n = a \cdot b^n$ מייצג איבר כללי של סדרה הנדסית (המנה $q = a$)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

*** נוסחאות לסכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית:**

*** הנוסחה המופיעה בדף הנוסחאות לבגרות:**

$$(1) \quad S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \longrightarrow$$

*** הנוסחה מומלצת לשמוש כאשר $|q| < 1$:**

$$(2) \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \longrightarrow$$

*** משתמשים כאשר ידוע האיבר האחרון**

$$(3) \quad S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \longrightarrow$$

*** בכל סדרה מתקיים :**

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

*** זיכרו את הקשר :**

$$(q^n)^2 = (q^2)^n = q^{2n}$$

$$|q| < 1, \quad S = \frac{a_1}{1 - q}$$

*** סכום סדרה הנדסית אין סופית שמנתה שבר אמיתי :**