



שאלון 481 (804)

גאומטריה וטריגונומטריה

מורה למתמטיקה: רות הלפנבאום

17/03/2019

עורכי המצגת: רן סודאי ורות הלפנבאום

טריגונומטרייה:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad ; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad ; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{משפט הסינוסים: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (R - \text{רדיוס המעגל החוסם})$$

$$\text{משפט הקוסינוסים: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \quad (\gamma \text{ היא הזווית הכלואה בין } a \text{ ל-} b)$$

$$S = \frac{1}{2} \alpha R^2 \quad \text{שטח גזרה של } \alpha \text{ רדיאנים}$$

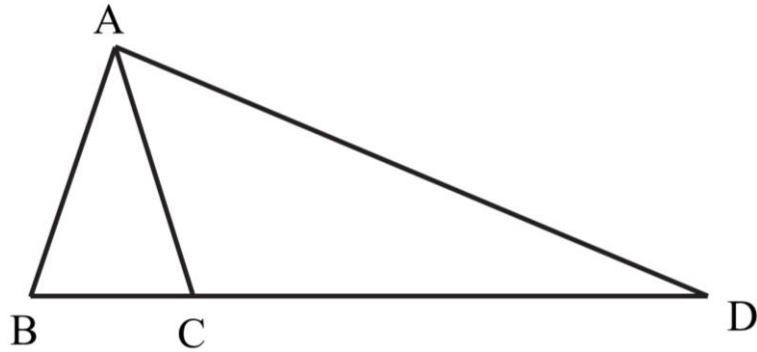
$$\ell = \alpha R \quad \text{אורך קשת של } \alpha \text{ רדיאנים}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad \text{שטח משולש: } (\alpha \text{ היא הזווית הכלואה בין } b \text{ ל-} c)$$

מה בתכנית?

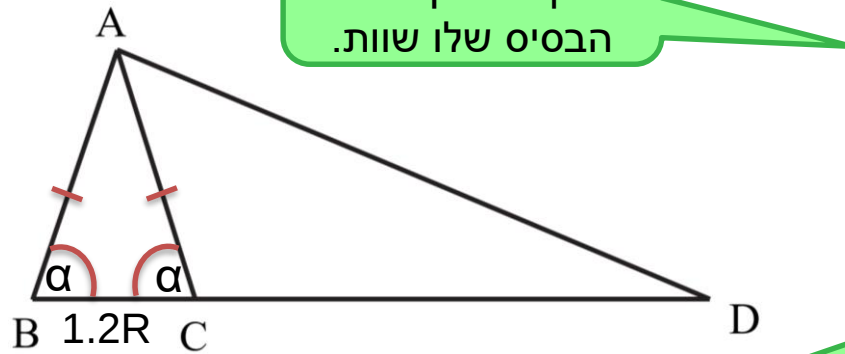
- בגרות חורף תשע"ח שאלה 5
- בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



- ABC הוא משולש חד זוויות ושווה-שוקיים ($AC=AB$).
 - אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R .
 - נתון: $BC=1.2R$.
- א-** (1) חשב את זוויות המשולש ABC.
- (2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R .
- המשיכו את הצלע BC עד הנקודה D, כמתואר בציור, כך ש- $CD=3.8R$.
- ב-** הבע את אורך הקטע AD באמצעות R .
- ג-** AE הוא גובה במשולש ACD. אורך הגובה AE הוא 9. חשב את R .

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



נתון רדיוס המעגל החוסם?
צלע המשולש מובעת באמצעות הרדיוס?
משפט הסינוסים!

- ABC הוא משולש חד זווית ושווה-שוקיים ($AC=AB$).
- אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R .
- נתון: $BC=1.2R$.

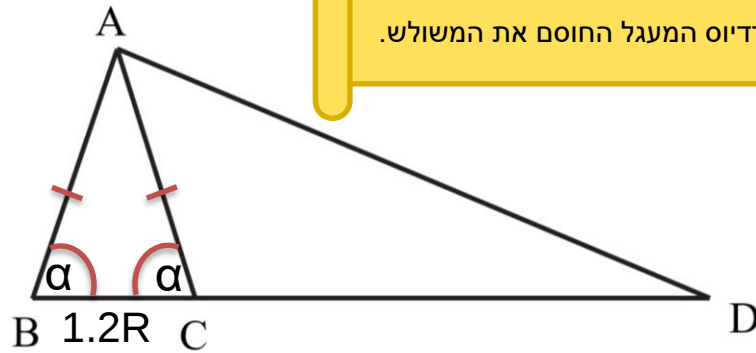
- א- (1) חשב את זוויות המשולש ABC.
- (2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R .

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

R רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



• ABC הוא משולש חד זוויות ושווה-שוקיים ($AC=AB$).

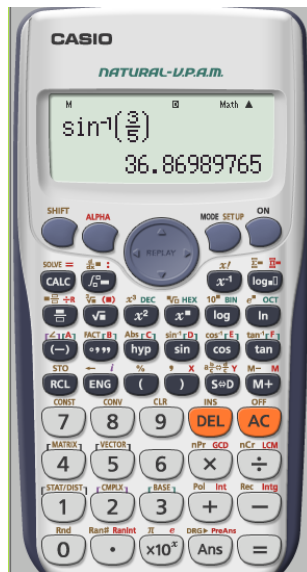
• אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R.

• נתון: $BC=1.2R$.

א- (1) חשב את זוויות המשולש ABC.

(2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R.

$$\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$$



נפתור:

$$\frac{BC}{\sin(\sphericalangle BAC)} = 2R \quad \text{משפט הסינוסים במשולש ABC}$$

$$\frac{1.2R}{\sin(\sphericalangle BAC)} = 2R \quad \text{נציב נתונים:}$$

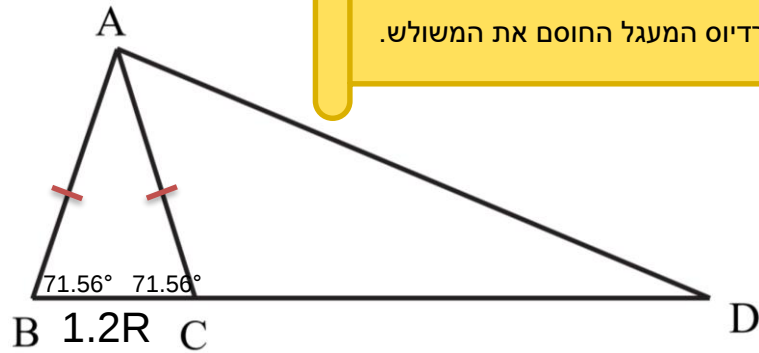
$$\sin(\sphericalangle BAC) = \frac{3}{5} \quad \text{נקבל: } \sphericalangle BAC = 36.87^\circ \quad \text{בעזרת המחשבון נקבל } \sphericalangle BAC = 36.87^\circ.$$

$$\text{או פתרון נוסף הוא } \sphericalangle BAC = 180^\circ - 36.87^\circ = 143.13^\circ.$$

נתון שהמשולש הוא חד זוויות, ולכן הפתרון הנכון הוא הראשון! $\sphericalangle BAC = 36.87^\circ$

נקבל לפיכך שזוויות המשולש ABC הן 71.565° , 71.565° ו- 36.87° .

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



• ABC הוא משולש חד זוויות ושווה-שוקיים ($AC=AB$).

• אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R.

• נתון: $BC=1.2R$.

א- (1) חשב את זוויות המשולש ABC.

(2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R.

כדי להביע את אורך הצלע AB באמצעות R נשתמש שוב במשפט הסינוסים במשולש ABC:

$$\frac{AB}{\sin(\angle ACB)} = 2R \quad \text{משפט הסינוסים במשולש ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin(71.565^\circ)} = 2R \quad \text{נציב נתונים:}$$

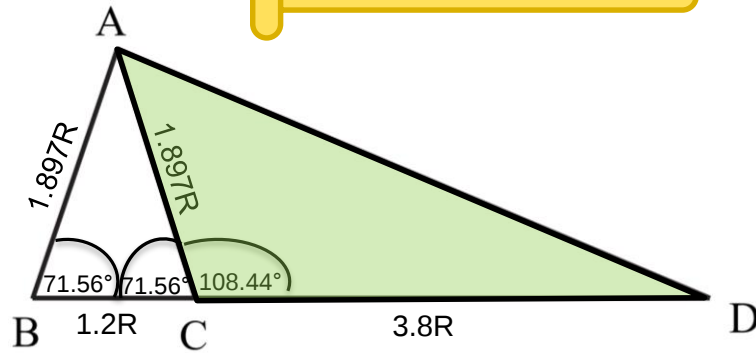
$$\text{נקבל: } AB=1.897R$$

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5

משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

γ היא הזווית הכלואה בין a ו- b .



• המשיכו את הצלע BC עד הנקודה D, כמתואר בציור, כך ש- $CD=3.8R$.

ב- הבע את אורך הקטע AD באמצעות R.

פתרון נוסף: משפט הקוסינוסים במשולש ACD:

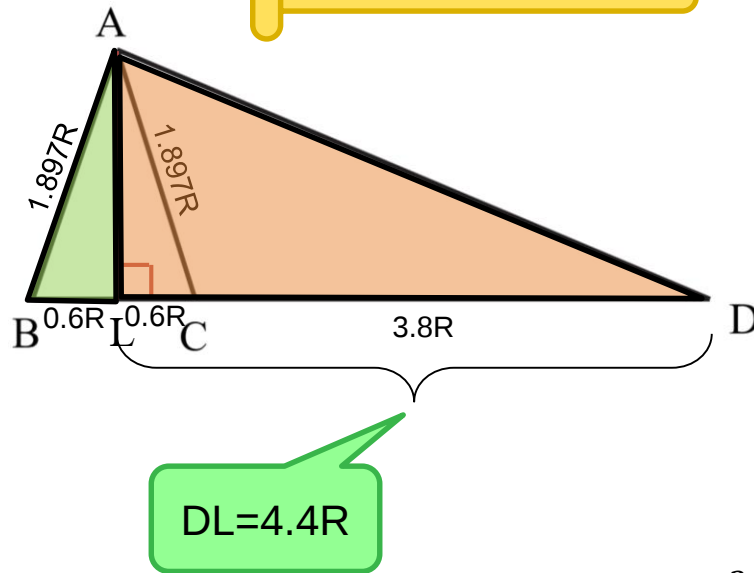
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos(\angle ACD)$$

נציב: $AD^2 = (1.897R)^2 + (3.8R)^2 - 2 \cdot 1.897R \cdot 3.8R \cdot \cos(108.44^\circ)$

נקבל: $AD^2 = 3.598R^2 + 14.44R^2 + 4.56R^2$

כלומר: $AD^2 = 22.599R^2$ ולכן $AD=4.753R$

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



• המשיכו את הצלע BC עד הנקודה D, כמתואר בציור, כך ש- $CD=3.8R$.

ב- הבע את אורך הקטע AD באמצעות R.

פתרון נוסף, גיאומטרי: נשתמש במשפט פיתגורס.

נוריד גובה AL לבסיס BC במשולש שווה השוקיים ABC.

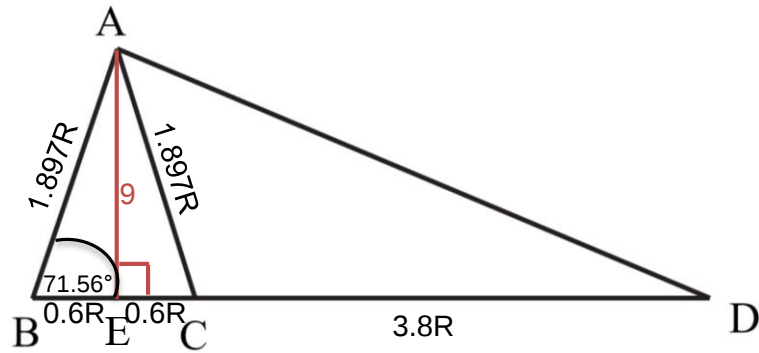
הגובה הוא תיכון לבסיס ולכן חוצה אותו לשני חלקים שווים השווים ל- $0.6R$.

• פיתגורס במשולש ABL: $AL^2 = AB^2 - BL^2 = (1.897R)^2 - (0.6R)^2 = 3.238R^2$

• פיתגורס במשולש ALD: $AD^2 = AL^2 + LD^2 = 3.238R^2 + (4.4R)^2 = 22.599R^2$

כלומר: $AD^2 = 22.599R^2$ ולכן $AD=4.753R$

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



ג- AE הוא גובה במשולש ACD. אורך הגובה AE הוא 9. חשב את R.

נשרטט את הגובה AE במשולש ACD.

נתבונן במשולש ABE. מתקיים: $\sin(\angle ABE) = \frac{AE}{AB}$

$$\text{נציב: } \sin(71.56^\circ) = \frac{9}{1.897R}$$

$$\text{כלומר: } 0.9487 = \frac{9}{1.897R}$$

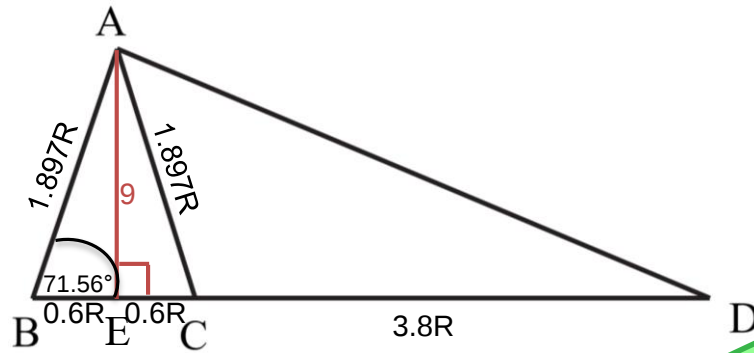
$$\text{נבודד את הרדיוס: } R = \frac{9}{1.897 \cdot 0.9487} \quad \text{כלומר: } R = 5$$

נסכם

בגרות חורף תשע"ח שאלה 5

נסכם - בגרות חורף תשע"ח שאלה 5

המשולש שווה שוקיים ולכן זוויות הבסיס שלו שוות.



• ABC הוא משולש חד זוויות ושווה-שוקיים ($AC=AB$).

• אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R.

• נתון: $BC=1.2R$.

נתון רדיוס המעגל החוסם?
צלע המשולש מובעת באמצעות הרדיוס?
משפט הסינוסים!

א- (1) חשב את זוויות המשולש ABC.

(2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R.

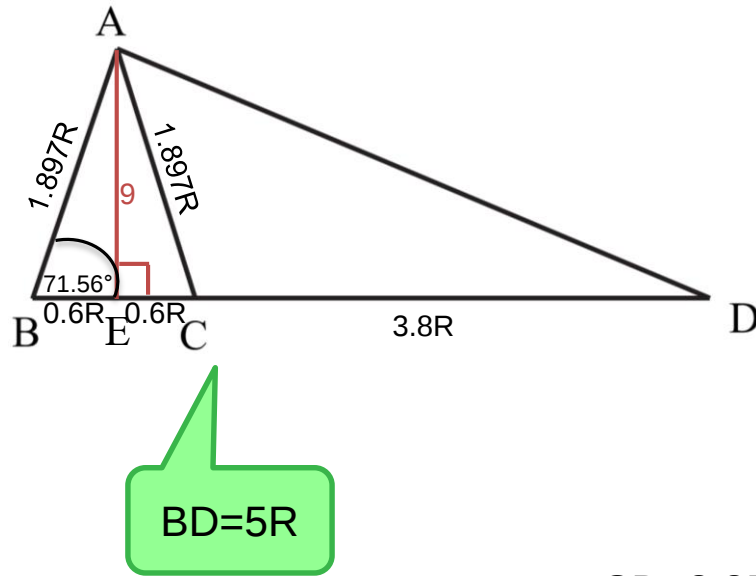
$$\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$$

משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$$

R רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

נסכם - בגרות חורף תשע"ח שאלה 5



- ABC הוא משולש חד זוויות ושווה-שוקיים ($AC=AB$).
- אורכו של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא R.
- נתון: $BC=1.2R$.

א- (1) חשב את זוויות המשולש ABC.

(2) הבע את אורך הצלע AB באמצעות R.

- המשיכו את הצלע BC עד הנקודה D, כמתואר בציור, כך ש- $CD=3.8R$.

ב- הבע את אורך הקטע AD באמצעות R.

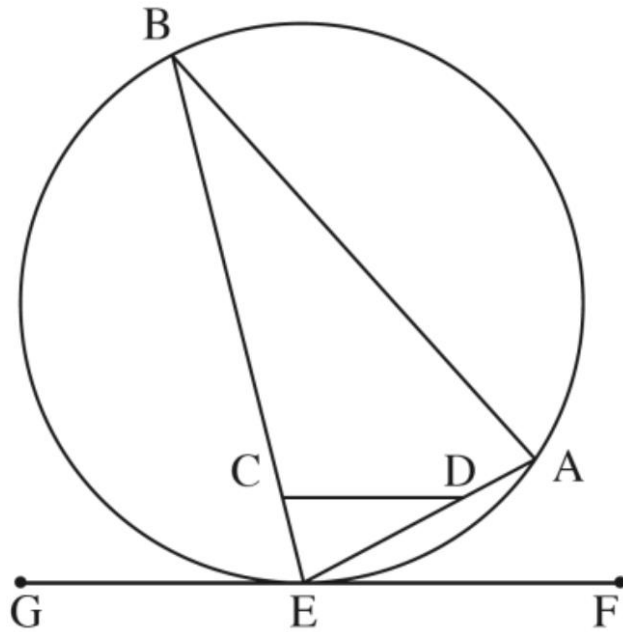
ג- AE הוא גובה במשולש ACD. אורך הגובה AE הוא 9. חשב את R.

$$\sin(\angle ABE) = \frac{AE}{AB}$$

מה בתכנית?

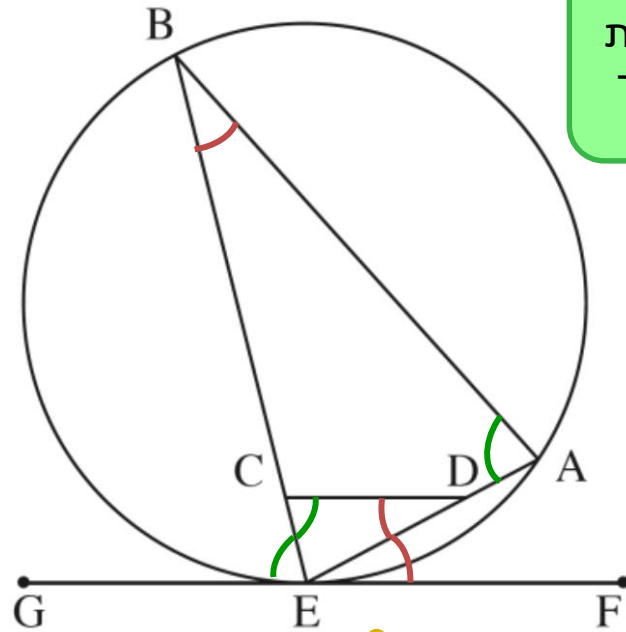
- בגרות חורף תשע"ח שאלה 5
- בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.
- א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.
- ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.
- ג- הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.
- ד- נתון: $CD = 4$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ, $ED = \frac{1}{3}AB$.
חשב את אורך הקטע ED.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



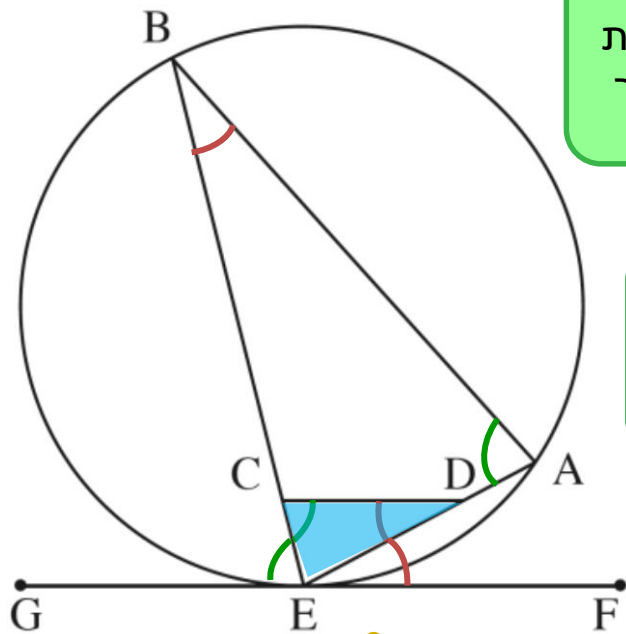
זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

זוויות מתאימות /
מתחלפות בין ישרים
מקבילים שוות זו לזו

- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

האם יש פה
משולשים
דומים?

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



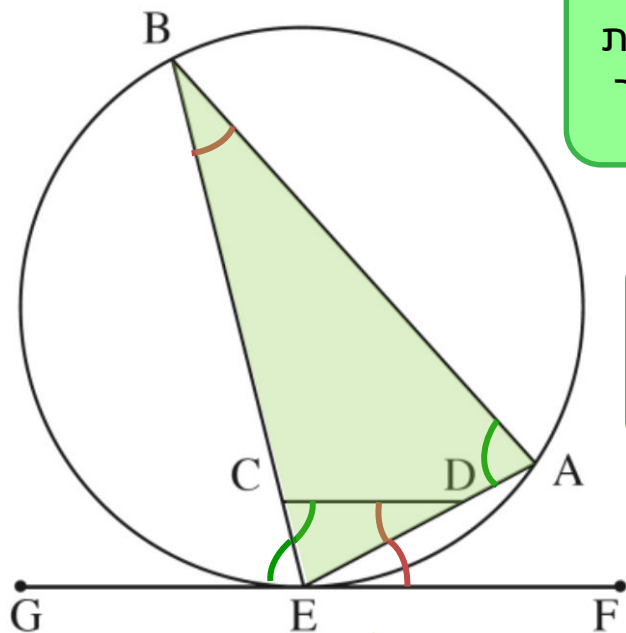
זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

זוויות מתאימות /
מתחלפות בין ישרים
מקבילים שוות זו לזו

- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

האם יש פה
משולשים
דומים?

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



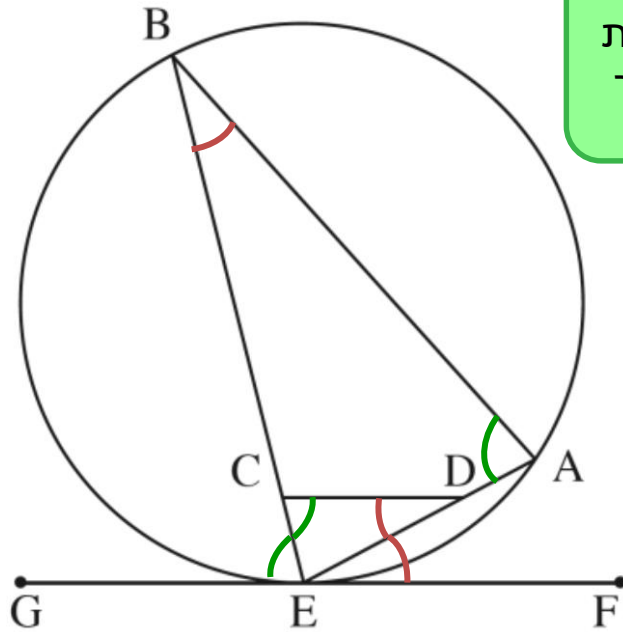
זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

זוויות מתאימות /
מתחלפות בין ישרים
מקבילים שוות זו לזו

- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

האם יש פה
משולשים
דומים?

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

זוויות מתאימות /
מתחלפות בין ישרים
מקבילים שוות זו לזו

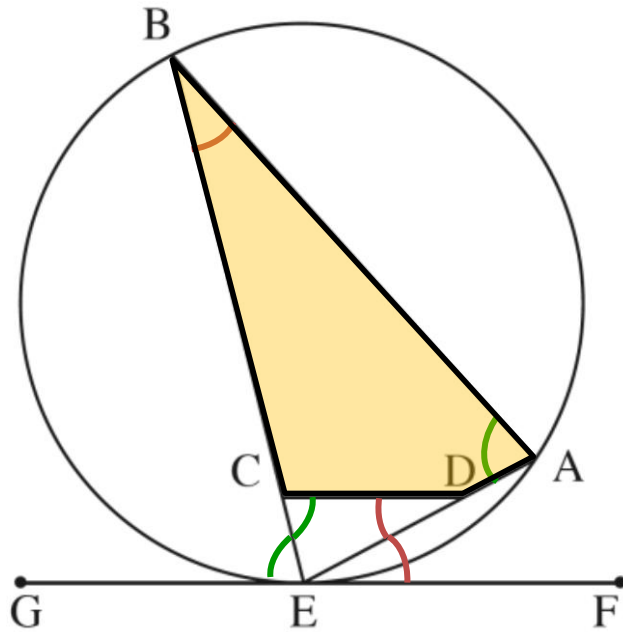
- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו-D נמצאות על הצלעות BE ו-AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.

ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

הוכחנו!

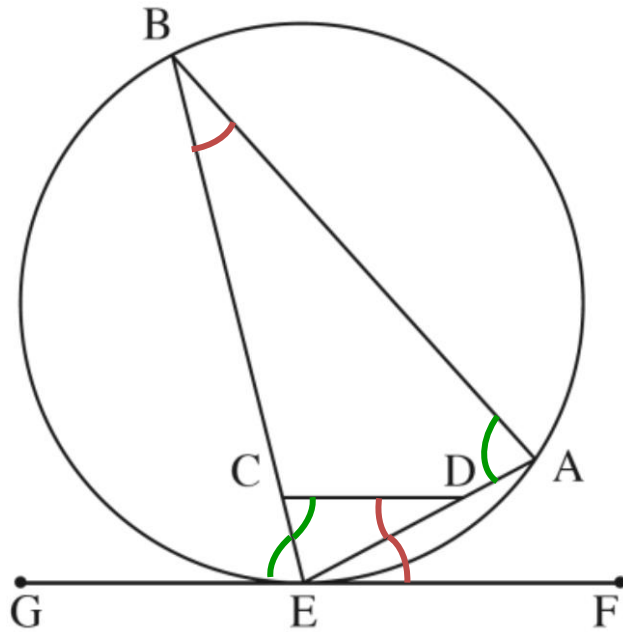
בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



אם במרובע סכום
זוויות נגדיות הוא
 180° , אז הוא בר
חסימה במעגל

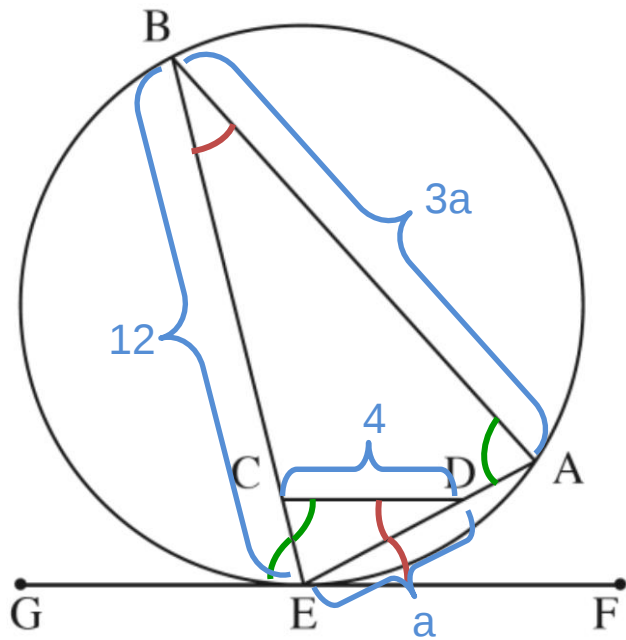
- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.
- א הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.
- ב הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.
- ג הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.
נראה זאת. זוויות צמודות משלימות ל- 180° ,
ולכן: $\angle ADC = 180^\circ - \angle CDE$.
בסעיף א' הוכחנו ש- $\angle ABE = \angle CDE$, ולכן מתקיים: $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,
כלומר: המרובע ABCD בר חסימה במעגל!

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.
- א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.
- ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.
- ג- הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.
- ד- נתון: $CD = 4$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ, $ED = \frac{1}{3}AB$.
חשב את אורך הקטע ED.

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

א- הוכח: $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CDE$.

ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

ג- הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.

7- נתון: $CD = 4$, $BE = 12$, $ED = \frac{1}{3}AB$

חשב את אורך הקטע ED.

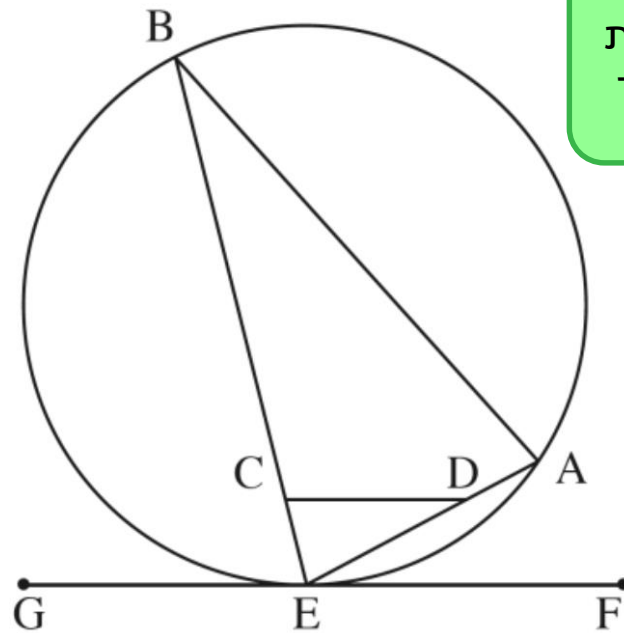
בסעיף ב' הוכחנו ש- $\Delta ABE \sim \Delta CDE$, ולכן מתקיים: $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{ED}$.

נציב את הנתונים: $\frac{3a}{4} = \frac{12}{a}$. הפתרון הוא $a = 4$, כלומר 4 ס"מ $ED =$.

נסכם

בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4

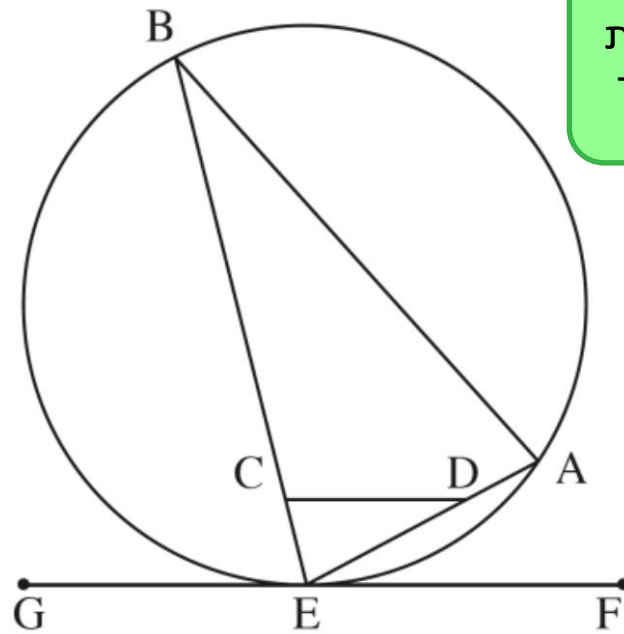
נסכם - בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.
- א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.
- ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

נסכם - בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



זווית בין משיק למיתר
שווה לזווית ההיקפית
שנשענת על המיתר
מצידו השני

זוויות מתאימות /
מתחלפות בין ישרים
מקבילים שוות זו לזו

• המשולש AEB חסום במעגל.

• הקטע GF משיק למעגל בנק' E.

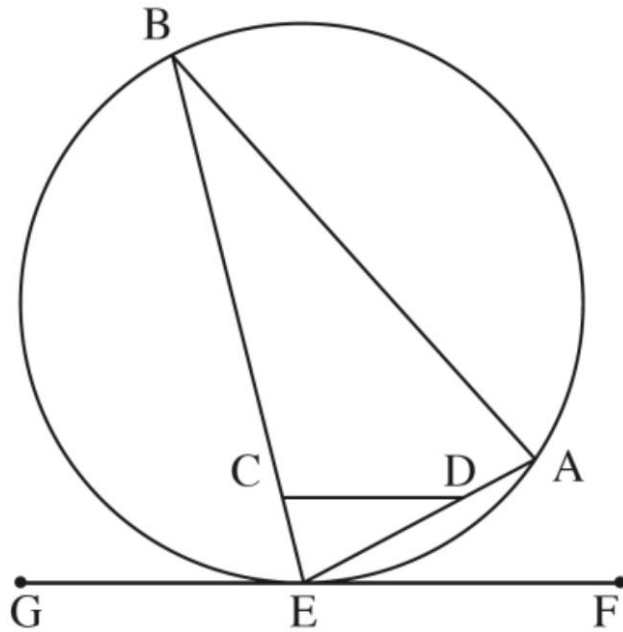
• הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה,

כך שהקטע CD מקביל למשיק.

א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.

ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

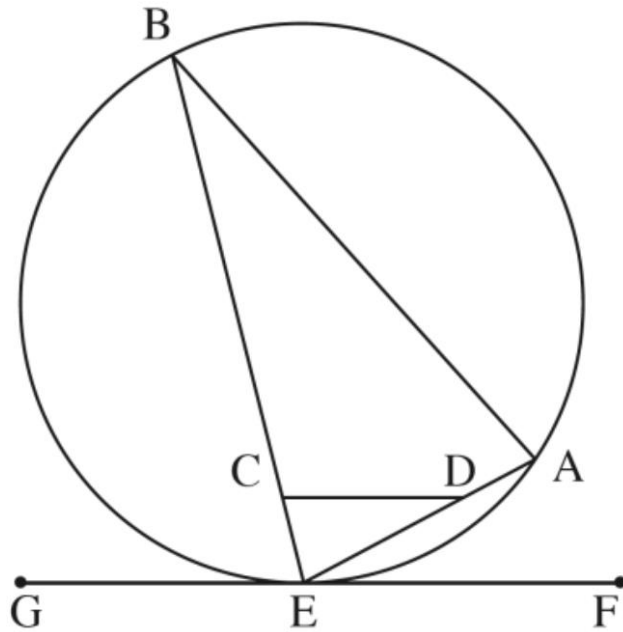
נסכם - בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.
- א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.
- ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.
- ג- הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.

אם במרובע סכום
זוויות נגדיות הוא
 180° , אז הוא בר
חסימה במעגל

נסכם - בגרות קיץ תשע"ח מועד ב' שאלה 4



- המשולש AEB חסום במעגל.
- הקטע GF משיק למעגל בנק' E.
- הנקודות C ו- D נמצאות על הצלעות BE ו- AE בהתאמה, כך שהקטע CD מקביל למשיק.

א- הוכח: $\angle ABE = \angle CDE$.

ב- הוכח: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

ג- הוכח: המרובע ABCD בר חסימה במעגל.

ד- נתון: $CD = 4$ ס"מ, $BE = 12$ ס"מ, $ED = \frac{1}{3} AB$.

חשב את אורך הקטע ED.

אם במרובע סכום זוויות נגדיות הוא 180° , אז הוא בר חסימה במעגל

לפי סעיף ב'
 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$

ולכן מתקיים: $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{ED}$

תודה!